D) Estadísticos minimales suficientes.

27. Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, demostrar que $T(\mathbf{X}) = \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ es minimal suficiente para $\theta$ cuando la muestra tiene distribución:

    b) logística $\mathcal{L}(\theta, 1)$, cuya densidad es

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left[1+e^{-(x-\theta)}\right]^2}$$

<u>Solución</u>:

Sea $\mathcal{P} = \{f(\mathbf{X}, \theta) : \theta \in \boldsymbol{\Theta}\}$. Consideremos la familia finita $\mathcal{P}_0 = \{f(\mathbf{X}, \mathbf{0}), \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta_\mathbf{1}), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta_\mathbf{k})\}$ luego si encontramos $T$ un estadístico minimal suficiente para $\theta \in \{0, \theta_1, \ldots, \theta_k\}$ y $T$ suficiente para $\theta \in \Theta$, entonces $T$ resultará minimal suficiente para $\theta \in \Theta$.

En $\mathcal{P}_0$, $T(\mathbf{X}) = (\frac{\mathbf{f}(\mathbf{X},\theta_\mathbf{1})}{\mathbf{f}(\mathbf{X},\mathbf{0})}, \ldots, \frac{\mathbf{f}(\mathbf{X},\theta_\mathbf{k})}{\mathbf{f}(\mathbf{X},\mathbf{0})})$ es minimal suficiente, entonces veamos que si $k = n+1$ resulta que $U(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}^{(\mathbf{1})}, \ldots, \mathbf{X}^{(\mathbf{n})})$ es equivalente a $T(X)$, es decir $T(X) = T(Y)$ sii $U(X) = U(Y)$. En este caso existirá una función $g$ tal que $U = g(T)$ luego U será minimal suficiente en $\mathcal{P}_0$ y como es suficiente en $\mathcal{P}$ es minimal suficiente en $\mathcal{P}$.

Entonces probemos que $T$ y $U$ son equivalentes.

$U(X) = U(Y)$ sii $X$ es una permutación de $Y$, veamos que $T(X) = T(Y)$ sii uno es una permutación del otro.

$$f(\mathbf{X};\theta) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta}}{\prod_{i=1}^n \left[1+e^{-(x_i-\theta)}\right]^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{X}, \theta_\mathbf{j})}{f(\mathbf{X}, \mathbf{0})} &= \frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta_j}}{\prod_{i=1}^n \left[1+e^{-(x_i-\theta_j)}\right]^2} \frac{\prod_{i=1}^n \left[1+e^{-(x_i)}\right]^2}{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}} \\
&= e^{n\theta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1+e^{-x_i}}{1+e^{-(x_i-\theta_j)}}\right)^2
\end{aligned}$$

ahora

$$\frac{f(\mathbf{X}, \theta_\mathbf{j})}{f(\mathbf{X}, \mathbf{0})} = \frac{f(\mathbf{Y}, \theta_\mathbf{j})}{f(\mathbf{Y}, \mathbf{0})} \iff e^{n\theta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1+e^{-x_i}}{1+e^{-(x_i-\theta_j)}}\right)^2 = e^{n\theta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1+e^{-y_i}}{1+e^{-(y_i-\theta_j)}}\right)^2$$

llamo $u_i = e^{-x_i}$, $\quad v_i = e^{-y_i}$ y $\xi_i = e^{\theta_i}$ entonces

$$e^{n\theta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1+e^{-x_i}}{1+e^{-(x_i-\theta_j)}}\right)^2 = e^{n\theta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1+e^{-y_i}}{1+e^{-(y_i-\theta_j)}}\right)^2 \iff$$
$$\prod_{i=1}^n \frac{1+u_i}{1+u_i\xi_j} = \prod_{i=1}^n \frac{1+v_i}{1+v_i\xi_j} \iff \prod_{i=1}^n \frac{1+u_i\xi_j}{1+u_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1+v_i\xi_j}{1+v_i}$$

Llamamos $g(\xi) = \prod_{i=1}^n \frac{1+u_i\xi}{1+u_i}$ y $h(\xi) = \prod_{i=1}^n \frac{1+v_i\xi}{1+v_i}$. Luego como función de $\xi$ ambas funciones son polinomios de grado n, que coinciden en $n+1$ puntos $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ luego $g = h$. En particular los términos lineales son iguales.

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+u_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+v_i} \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{i=1}^n (1+u_i) = \prod_{i=1}^n (1+v_i)$$

Entonces

$$\prod_{i=1}^n (1+u_i\xi) = \prod_{i=1}^n (1+v_i\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{i=1}^n (\xi^{-1}+u_i) = \prod_{i=1}^n (\xi^{-1}+v_i)$$

Llamamos $\eta = \xi^{-1}$, $\quad \widetilde{g}(\eta) = \prod_{i=1}^n (\eta + u_i)$ y $\widetilde{h}(\eta) = \prod_{i=1}^n (\eta + u_i)$. Luego como función de $\eta$ ambas funciones son polinomios de grado n, que coinciden en $n+1$ puntos $1/\xi_1, \ldots, 1/\xi_{n+1}$ luego $\widetilde{g} = \widetilde{h}$, entonces los $u_i$ y los $v_i$ son los mismos salvo permutaciones. Entonces $X$ e $Y$ son iguales salvo permutaciones. Es decir, si $U(X) = U(Y)$ se tiene que $(X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}) = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$, que es lo que queíamos ver.