

Repaso de probabilidades

1. Una variable aleatoria X tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$ si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x} I_{[0, \infty)}(x) \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Probar que:

- (a) $E(X) = n/\lambda$ y $V(X) = n/\lambda^2$.
 - (b) Si $a > 0$, entonces $aX \sim \Gamma(n, \lambda/a)$.
 - (c) Si $Y \sim \Gamma(m, \lambda)$ independiente de X , entonces $X + Y \sim \Gamma(n + m, \lambda)$.
2. (a) Si $Z \sim N(0, 1)$, probar que $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.
(NOTA: Usar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.)
- (b) La distribución $\Gamma(n/2, 1/2)$, para $n \in \mathbb{N}$, se denomina χ_n^2 (chi-cuadrado con n grados de libertad). Probar que si Z_1, \dots, Z_n son v.a. independientes con distribución $N(0, 1)$, entonces $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$.

3. Una variable aleatoria X tiene distribución $\beta(r, s)$ si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \cdot x^{r-1} (1-x)^{s-1} I_{[0,1]}(x).$$

Probar que:

- (a) $E(X) = r/(r+s)$ y $V(X) = rs/[(r+s)^2(r+s+1)]$.
 - (b) Analizar el caso en que $r = s = 1$.
4. Una variable aleatoria X tiene distribución $\mathcal{C}(0, 1)$ si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$$

- (a) Probar que X no tiene momentos finitos de ningún orden.
 - (b) Si X_1, \dots, X_n son independientes y tienen distribución $\mathcal{C}(0, 1)$, mostrar que $\bar{X}_n \sim \mathcal{C}(0, 1)$. ¿Vale la Ley de los Grandes Números?
5. (a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Encontrar la función característica de X .
- (b) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ independientes, demostrar que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
- (c) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|X = x \sim Bi(x, p)$ entonces $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
6. Sean $\{X_n\}_{n \geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \rightarrow X$ e $Y_n \rightarrow Y$ en probabilidad (o c.s., respectivamente). Probar que:

- (a) X_n está acotada en probabilidad en ambos casos. También, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, entonces X_n está acotada en probabilidad.

- (b) Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $g(X_n, Y_n) \rightarrow g(X, Y)$ en probabilidad o c.s., respectivamente.
7. Sean $\{X_n\}_{n \geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones de v.a. tales que X_n está acotada en probabilidad e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, demostrar que $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.
8. (a) Probar que si $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ entonces $X_n \xrightarrow{p} \mu$
 (b) Deducir la Ley Débil de los Grandes Números a partir del Teorema Central del Límite.
9. (Teorema de Slutsky) Sean $\{X_n\}_{n \geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones de v.a. y a una constante tales que $X_n \xrightarrow{p} a$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que:
- (a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a + Y$.
 (b) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aY$.
10. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de v.a. tales que

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2).$$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g es derivable, g' es continua en μ y $g'(\mu) \neq 0$.

- (a) Demostrar que

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2).$$

- (b) ¿Cuál sería la distribución asintótica de

$$n(g(X_n) - g(\mu))$$

si $g'(\mu) = 0$ pero g'' es continua en μ y $g''(\mu) \neq 0$?

11. (Desigualdad de Jensen) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Y sea X una variable aleatoria con esperanza finita probar que

$$E(\phi(X)) \geq \phi(E(X))$$

12. Sea X una variable aleatoria y sea m una mediana de X . Probar que

$$m = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} E(|X - c|).$$

13. Un vector aleatorio $X \in \mathbb{R}^p$ tiene distribución $N_p(\mu, \Sigma)$, si su función de densidad es,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}.$$

- (a) Probar que X_1, \dots, X_p son independientes si y sólo si Σ es diagonal.
 (b) Probar que $\Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim N_p(0, I_p)$.
 (c) Probar que si $Y \sim N_p(0, I_p)$ y $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ entonces $AY + \mu \sim N_p(\mu, AA')$.
 (d) Si $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ con $q \leq p$ e $Y = AX$, entonces $Y \sim N(A\mu, A\Sigma A')$.

Sugerencia: Considere la función característica del vector aleatorio definida como

$$\phi_X(t) = E(\exp \{i t' X\}) = E(\exp \{i \sum_{j=1}^p t_j X_j\})$$