A) Error cuadrático medio. Estimadores insesgados.

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con parámetro θ. Sea $\hat{\theta}_n = \delta(\mathbf{X})$ un estimador de θ con varianza finita. Si $b(\hat{\theta}_n)$ es el sesgo de $\hat{\theta}_n$, probar que $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución tal que existe $E(X_1) = \mu$. Consideremos la clase de estimadores
$$\mathcal{D} = \left\{ \delta(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i : \alpha_i \in I\!R, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$
   (a) Probar que todo $\delta \in \mathcal{D}$ es un estimador insesgado de μ.
   (b) Supongamos que existe $V(X) = \sigma^2$. Mostrar que $\bar{X} = \arg\min_{\delta \in \mathcal{D}} V(\delta)$.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución tal que existe $V(X) = \sigma^2$.
   (a) Demostrar que
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$$
   es un estimador insesgado de σ^2.
   (b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, calcular el $\mathrm{ECM}(s^2)$ y el $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ donde $\tilde{\sigma}^2 = (n-1)\, s^2 / (n+1)$.
   (c) Probar que, aunque $\mathrm{ECM}(s^2) > \mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$, la razón entre los ECM tiende a 1 cuando $n \to \infty$.
   (d) Mostrar que la contribución del sesgo de $\tilde{\sigma}^2$ a $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ es despreciable cuando $n \to \infty$ (en el sentido de que la razón entre $b(\tilde{\sigma}^2)^2$ y $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ tiende a 0).

4. Dada una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$, sea $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ y $\tilde{\theta}_n$ el estimador de θ basado en el primer momento.
   (a) Probar que $\tilde{\theta}_n$ es insesgado y que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado.
   (b) Calcular el ECM de ambos estimadores. ¿Qué estimador preferirí a desde este punto de vista?

B) Estadísticos suficientes.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Demostrar que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente para λ:
   (a) Aplicando la definición.
   (b) Aplicando el Teorema de Factorización.

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución continua $F(x, \theta)$. Demostrar que $T(\mathbf{X}) = \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \right)$ es suficiente para θ.

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria. Probar que:

   (a) Si $X_i \sim Bi\,(n_i, p)\,,\ 1 \leq i \leq n$, con n_i conocidos, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p.

   (b) Si $X_i \sim \Gamma\,(\alpha, \lambda)$ entonces $\left(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right)$ es suficiente para $(\alpha, \lambda)\,.$
   Si α es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para λ.
   Si λ es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para α.

   (c) Si $X_i \sim \beta\,(r, s)$ entonces $\left(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right)$ es suficiente para $(r, s)\,.$
   Si r es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n (1 - X_i)$ es suficiente para s.
   Si s es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para r.

   (d) Si X_i tiene función de probabilidad puntual

   $$f\,(x; \theta, p) = (1 - p)\,p^{x-\theta} \text{ para } x = \theta, \theta + 1, \theta + 2, \ldots$$

   con $(\theta, p) \in I\!R \times\ (0, 1)\,,$ entonces $\left(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i\right)$ es suficiente para $(\theta, p)\,.$
   Si p es conocido, entonces $X_{(1)}$ es suficiente para θ.
   Si θ es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. $\mathcal{U}\,(\theta_1, \theta_2)$. Mostrar que $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ es suficiente para θ.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución con densidad

   $$f\,(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right\} I_{[\mu, \infty)}\,(x)$$

   con $\mu \in I\!R$ y $\sigma > 0$.

   (a) Exhibir un estadístico suficiente bidimensional para (μ, σ).

   (b) Hallar un estadístico suficiente para μ cuando σ es fijo y conocido.

   (c) Hallar un estadístico suficiente para σ cuando μ es fijo y conocido.

10. Consideremos una familia $\{p\,(\mathbf{x}, \theta) : \theta \in \Theta\}$ tal que el soporte $S = \{\mathbf{x} : p\,(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ es independiente de θ y $\theta = (\theta_1, \theta_2)\,,$ con $\theta_1 \in \Theta_1$ y $\theta_2 \in \Theta_2$ variando independientemente. Supongamos que $T_1(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_1 cuando θ_2 es fijo y conocido y que $T_2\,(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_2 cuando θ_1 es fijo y conocido.

    (a) Demostrar que $T\,(\mathbf{X}) = (T_1\,(\mathbf{X})\,, T_2\,(\mathbf{X}))$ es suficiente para θ.

    (b) Mostrar que la recíproca de (a) no es cierta en general. Considerar la familia $N\,(\mu, \sigma^2)\,.$

11. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribució n P_θ. Supóngase que $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ. Demostrar que el EMV de θ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de $T(\mathbf{X})$.

C) Estimadores basados en estadísticos suficientes.

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$. Luego, $\delta\,(\mathbf{X}) = X_1$ es un estimador insesgado de θ y $T\,(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente.

(a) Usando el Teorema de Rao–Blackwell, hallar un estimador insesgado $\delta^*(T)$ que sea mejor que δ.

(b) Probar que $V_\theta(\delta^*) < V_\theta(\delta) \quad \forall\, \theta$ si $n > 1$.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y $T = \sum_{i=1}^n X_i$ el estadístico suficiente.

    (a) Sea $\mu = e^{-\lambda}$. Mostrar que $\hat{\mu} = I\{X_1 = 0\}$ es un estimador insesgado de μ.

    (b) Aplicar el Teorema de Rao–Blackwell para obtener un estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que $\hat{\mu}$ y comparar los ECM de ambos estimadores.

    Sugerencia: probar y usar que $X_1|T \sim Bi(T, 1/n)$.

14. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$. Dados m y k tales que $k \leq m < n$, se quiere estimar $q(\theta) = \binom{m}{k}\theta^k(1-\theta)^{m-k}$. Sea $S = \sum_{i=1}^m X_i$ y $h(S) = I\{S = k\}$.

    (a) Probar que $h(S)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$.

    (b) Construir un estimador insesgado de $q(\theta)$ mejor que $h(S)$.

15. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, 1)$ y $\xi \in \mathbb{R}$ un número fijo y conocido. Se desea estimar $p = P(X_1 \leq \xi)$.

    (a) Mostrar que $I\{X_1 \leq \xi\}$ es un estimador insesgado de p.

    (b) A partir de $T = \bar{X}$, construir otro estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que el anterior.

    Sugerencia: probar y usar que $\bar{X}$ y $X_1 - \bar{X}$ son independientes.