

A) Familias exponenciales.

1. Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales. En cada caso, hacer una elección explícita de  $a(\theta)$ ,  $h(\mathbf{x})$ ,  $c_j(\theta)$  y  $t_j(\mathbf{x})$  y exhibir un estadístico suficiente para  $\theta$ .

(a)  $\mathcal{P}(\theta)$ ;  $\theta > 0$ .

(b)  $N(\mu, \sigma^2)$ ;  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ .

(c)  $\Gamma(r, \lambda)$ ;  $\theta = (r, \lambda)$ , con  $r, \lambda > 0$ .

(d)  $\mathcal{M}(n, \theta_1, \dots, \theta_k)$ ;  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ , con  $0 < \theta_j < 1$ ,  $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$  y  $n$  conocido.

(e)  $BN(r, \theta)$ ;  $0 < \theta < 1$  y  $r$  conocido.

(f)  $\beta(r, s)$ ;  $\theta = (r, s)$ , con  $r, s > 0$ .

2. Consideremos la familia de distribuciones normales bivariadas  $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , donde  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , con  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  y  $|\rho| < 1$ , cuya densidad conjunta es:

$$f(x, y; \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{2(1-\rho^2)} \right\}$$

- (a) Probar que esta familia es exponencial.

- (b) Encontrar un estadístico suficiente para  $\theta$  a partir de una m.a.  $X_1, \dots, X_n$ .

3. (a) Sea  $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$  una familia exponencial en la recta. Probar que el soporte de  $f(x; \theta)$  no depende de  $\theta$ .

- (b) Mostrar que la familia  $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 0\}$  no es exponencial.

4. (a) Sea  $\{f(\mathbf{x}; \theta_1, \theta_2) : \theta \in \Theta\}$  una familia exponencial a dos parámetros en forma canónica (es decir que  $c_j(\theta) = \theta_j$ ). Sea  $T = (T_1, T_2)$  el estadístico suficiente canónico. Demostrar que la distribución de  $T_2|T_1$  pertenece a una familia exponencial de parámetro  $\theta_2$ .

- (b) Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Por lo tanto los parámetros canónicos son  $\theta_1 = \mu/\sigma^2$  y  $\theta_2 = -1/2\sigma^2$ , y el estadístico suficiente canónico es  $T = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ . Verificar que la distribución de  $\sum X_i^2$  condicional a  $\sum X_i$  pertenece a una familia exponencial cuyo parámetro no depende de  $\mu$ .

*Sugerencia:* usar que  $\sum X_i$  y  $\sum (X_i - \bar{X})^2$  son independientes.

5. Consideremos  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una  $f(\mathbf{x}; \theta)$  que pertenece a una familia exponencial a  $k$  parámetros en forma canónica. Sea  $\psi(\theta)$  tal que  $a(\theta) = \exp\{-\psi(\theta)\}$ . Mostrar que el EMV de  $\theta$  satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_j(\mathbf{X}_i), \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

B) Estimadores IMVL e IMVU.

6. Sea  $\delta_0$  un estimador insesgado de  $q(\theta)$ . Definamos la clase de estadísticos

$$\mathcal{U} = \{U : E_\theta(U) = 0 \quad \forall \theta\}.$$

Probar que cualquier estimador insesgado de  $q(\theta)$  es de la forma  $\delta = \delta_0 - U$  para algún  $U \in \mathcal{U}$ .

7. Sea  $X$  una v.a. tal que  $R_X = \{-1\} \cup \mathbb{N}_0$  cuya función de probabilidad puntual está dada por

$$p_X(-1) = \theta, \quad p_X(k) = (1 - \theta)^2 \theta^k \text{ si } k \in \mathbb{N}_0, \text{ para } \theta \in (0, 1).$$

(a) Sean  $\delta_1 = I\{X = -1\}$  y  $\delta_2 = I\{X = 0\}$ . Probar que  $\delta_1$  es un estimador insesgado de  $q_1(\theta) = \theta$  y  $\delta_2$  es un estimador insesgado de  $q_2(\theta) = (1 - \theta)^2$ .

(b) Mostrar que  $U \in \mathcal{U}$  si y sólo si  $U = aX$  para alguna constante  $a \in \mathbb{R}$ .

*Sugerencia:* usar que  $1/(1-r)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}$  si  $|r| < 1$ .

(c) Se define el *Estimador de Mínima Varianza Local para  $q(\theta)$  en  $\theta = \theta_0$  basado en la muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$* , es decir el IMVL de  $q(\theta)$  en  $\theta = \theta_0$  basado en la muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  a un estadístico  $\delta^*(X_1, \dots, X_n) = \delta^*$  que satisface

- $E_\theta(\delta^*) = q(\theta) \quad \forall \theta$ , es decir es un estimador insesgado de  $\theta$
- Si  $\delta$  es cualquier otro estimador insesgado de  $\theta$ , entonces  $Var_{\theta_0}(\delta^*) \leq Var_{\theta_0}(\delta)$ .

Encontrar los estimadores IMVL de  $q_1(\theta)$  y  $q_2(\theta)$  en  $\theta = \theta_0$ .

(d) Probar que existe un estimador IMVU para  $q_2(\theta)$  pero no para  $q_1(\theta)$ .

8. (a) Demostrar que  $\delta$  es IMVL de  $q(\theta)$  en  $\theta = \theta_0$  si y sólo si para todo  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $V_{\theta_0}(U) < \infty$  se tiene que  $E_{\theta_0}(\delta U) = 0$ .

(b) Si  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son IMVL de  $q(\theta)$  en  $\theta = \theta_0$ , probar que  $P_{\theta_0}(\delta_1 = \delta_2) = 1$ .

9. Sea  $X$  una v.a. como en el ejercicio 7. Probar que  $q(\theta)$  tiene un estimador IMVU si y sólo si es de la forma  $q(\theta) = a + b(1 - \theta)^2$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ .

10. Sean  $\delta_1$  y  $\delta_2$  dos estimadores IMVU de  $q_1(\theta)$  y  $q_2(\theta)$  respectivamente, y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Demostrar que  $c_1\delta_1 + c_2\delta_2$  es IMVU de  $c_1q_1(\theta) + c_2q_2(\theta)$ .

*Sugerencia:* extender el ejercicio 8 para estimadores IMVU.

C) Completitud.

11. Consideremos una familia  $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$  y sea  $T$  un estadístico suficiente para  $\mathcal{P}$ . Supongamos que  $\delta(T)$  es un estimador insesgado de  $q(\theta)$ . Entonces  $\delta$  es el único estimador insesgado que es función de  $T$  si y sólo si  $T$  es completo para  $\mathcal{P}$ .

12. (**Teorema de Basu**) Sea  $T$  un estadístico suficiente y completo para una familia  $\mathcal{P}$ . Si  $V$  es un estadístico ancilar (es decir, que su distribución no depende de  $\theta$ ) probar que  $T$  y  $V$  son independientes.

*Sugerencia:* probar que  $P(V \in A|T) = P(V \in A)$  para todo evento  $A$ .

13. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son completos.
14. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $N(\mu, 1)$ .
- Mostrar que  $T = (X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$  es suficiente para  $\mu$  pero no completo.
  - Hallar un estadístico completo y un estimador IMVU de  $\mu$ .
15. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $\mathcal{U}(0, \theta)$ . Probar que  $X_{(n)}$  es completo para  $\theta$ .
16. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $Bi(1, \theta)$ , con  $\theta \in \Theta \subset (0, 1)$ .
- Mostrar que si  $\Theta$  tiene más de  $n$  puntos, el estadístico  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es completo.
  - Deducir que  $\bar{X}$  es IMVU de  $\theta$ .
  - Mostrar que  $q(\theta) = \theta/(1-\theta)$  no es estimable mediante un estimador insesgado.
17. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ .
- Mostrar que si  $\sigma^2$  es conocido,  $\bar{X}$  es IMVU para  $\mu$ .
  - Mostrar que si  $\mu$  es conocido,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  es IMVU para  $\sigma^2$ .
  - Mostrar que si ambos parámetros son desconocidos, entonces  $\bar{X}$  es IMVU para  $\mu$  y  $s^2$  es IMVU para  $\sigma^2$ .
18. En el ejercicio 13 de la Práctica 2, hallar estimadores IMVU para  $\lambda, \lambda^2$  y  $\mu$ .
19. En el ejercicio 14 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para  $q(\theta)$ .
20. En el ejercicio 15 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para  $p$ .
21. Sean  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  dos m.a. independientes, con distribución  $N(\mu, \sigma_1^2)$  y  $N(\mu, \sigma_2^2)$  respectivamente. Consideremos el parámetro  $\theta = (\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ .
- Probar que  $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\sum X_i, \sum Y_j, \sum X_i^2, \sum Y_j^2)$  es suficiente para  $\theta$  pero no completo.
  - Supongamos que  $r = \sigma_1^2/\sigma_2^2$  es conocido. Probar que

$$T^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left( \sum_{i=1}^n X_i + r \sum_{j=1}^m Y_j, \sum_{i=1}^n X_i^2 + r \sum_{j=1}^m Y_j^2 \right)$$

es completo para  $\theta$ . Hallar un estimador IMVU de  $\mu$ .

22. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $\mathcal{E}(\theta)$ . Hallar un estimador IMVU de  $\theta$ .

#### D) Estadísticos minimales suficientes.

23. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son minimales.
24. Sean  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  muestras aleatorias independientes con distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  y  $N(\eta, \tau^2)$  respectivamente. Encontrar estadísticos suficientes minimales para  $\theta$  cuando:

(a)  $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)$ , si  $\mu, \eta \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2, \tau^2 > 0$ .

(b)  $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2)$ , si  $\mu, \eta \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 = \tau^2 > 0$ .

(c)  $\theta = (\mu, \sigma^2, \tau^2)$ , si  $\mu = \eta \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2, \tau^2 > 0$ .

25. Sea  $X_1$  una variable  $N(\mu, \sigma_1^2)$  y  $X_2$  con distribución  $N(\mu, \sigma_2^2)$  independiente de  $X_1$ . Probar que  $T = (X_1, X_2, X_1^2, X_2^2)$  es minimal suficiente pero no completo y que no existe un estimador IMVU para  $\mu$ .

26. Sea  $\mathcal{P} = \{N(\theta, \theta^2) : \theta > 0\}$  y  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. con distribución en  $\mathcal{P}$ . Probar que  $T(\mathbf{X}) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$  es suficiente minimal para  $\mathcal{P}$ .

27. Dada una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$ , demostrar que  $T(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  es suficiente minimal para  $\theta$  cuando la muestra tiene distribución:

(a)  $\mathcal{C}(\theta, 1)$ , con densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x - \theta)^2}$$

(b)  $\mathcal{L}(\theta, 1)$ , cuya densidad es

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{[1 + e^{-(x-\theta)}]^2}$$

#### E) Desigualdad de Rao–Cramer.

28. Probar que si  $f(x; \theta)$  admite derivada segunda respecto de  $\theta$  y si se puede derivar dentro de la integral, entonces

$$I(\theta) = -E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X; \theta) \right].$$

29. Consideremos una familia  $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$  y supongamos que se hace una reparametrización  $\xi = h(\theta)$  con  $h$  biyectiva y derivable. Mostrar que  $I(\xi) = I(\theta) / [h'(\theta)]^2$ .

30. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $Bi(1, \theta)$ .

(a) Calcular el número de información de Fisher  $I_1(\theta)$ .

(b) Mostrar que  $\bar{X}$  alcanza la cota de Rao–Cramer y deducir que es IMVU para  $\theta$ .

31. Sea  $X$  una v.a. con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  y sean  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  como en el ejercicio 13 de la Práctica 2. Mostrar que aunque  $\hat{\mu}$  es un estimador IMVU de  $\mu$ , la cota de Rao–Cramer es estrictamente menor que  $V_\lambda(\hat{\mu})$ .

32. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $N(\mu, \sigma_0^2)$ , con  $\sigma_0^2$  conocido.

(a) Mostrar que  $\bar{X}$  es un estimador IMVU para  $\mu$ , usando la desigualdad de Rao–Cramer.

(b) Mostrar que  $\bar{X}^2 - \sigma_0^2/n$  es un estimador IMVU de  $\mu^2$ , aunque no alcanza la cota de Rao–Cramer.