Robustez.

1. Sea $\hat{\mu}(x_1, ..., x_n)$ el M–estimador de posición dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \psi((x_i - \hat{\mu})/\sigma) = 0$$

donde σ es conocido. Probar que tiene las siguientes propiedades

(i) $\hat{\mu}(x_1 + a, ..., x_n + a) = \hat{\mu}(x_1, ..., x_n) + a$

(ii) $\hat{\mu}(-x_1, ..., -x_n) = -\hat{\mu}(x_1, ..., x_n)$

2. Sea $x_i = \mu + \sigma u_i$, $\sigma > 0$ con los u_i v.a.i.i.d. con distribución F simétrica alrededor del 0 y con esperanza finita. Probar que (i) y (ii) implican que $\hat{\mu}$ es un estimador insesgado para μ.

3. Sea $\hat{\sigma} = MAD(x_1, ..., x_n)$ probar que

$$\hat{\sigma}(bx_1 + a, ..., bx_n + a) = |b|\hat{\sigma}(x_1, ..., x_n)$$

4. Sea $\hat{\mu}(x_1, ..., x_n)$ el M–estimador dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \psi((x_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}) = 0$$

Mostrar que $\hat{\mu}$ ademas de satisfacer (i) y (ii) del problema 8 también satisface

(iii) $\hat{\mu}(bx_1, ..., bx_n) = b\hat{\mu}(x_1, ..., x_n)$.

5. Calcular k tal que $V(\psi_k^H, F\ ) = 1.05$, 1.10 y 1.25 cuando F es N(0,1).

6. Calcular y graficar las curvas de influencia $IC_{T,0}\,(x)$, cuando T es el $M-$estimador calculado con ψ_k^H y k como en el ejercicio 2, F_0 es $\mathrm{N}(0,1)$ y $\sigma = 1$. Calcular los correspondientes valores de $\gamma_{T,0} = \sup_x |IC_{T,0}\,(x)|$, la sensibilidad a errores groseros. Sacar conclusiones.

7. Calcular el valor de k que minimiza $\gamma_{T,0}$, donde T es el $M-$estimador calculado con ψ_k^H, F_0 es $\mathrm{N}(0,1)$ y $\sigma = 1$. ¿Qué propiedad tiene este estimador?

8. Generar una muestra de una $N(0,1)$ de tamaño 40 y graficar la la función de influencia empírica del M-estimador basado en ψ_k^H y $k = 1.345$. Compararla con la teórica.

9. Hacer un programa que calcule el $M-$estimador para el modelo de posición cuando σ es deconocido.