

A) Familias exponenciales.

1. Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales. En cada caso, hacer una elección explícita de $a(\theta)$, $h(\mathbf{x})$, $c_j(\theta)$ y $t_j(\mathbf{x})$ y exhibir un estadístico suficiente para θ .

- (a) $\mathcal{P}(\theta)$; $\theta > 0$.
- (b) $N(\mu, \sigma^2)$; $\theta = (\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.
- (c) $\Gamma(r, \lambda)$; $\theta = (r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.
- (d) $\mathcal{M}(n, \theta_1, \dots, \theta_k)$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, con $0 < \theta_j < 1$, $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$ y n conocido.
- (e) $BN(r, \theta)$; $0 < \theta < 1$ y r conocido.
- (f) $\beta(r, s)$; $\theta = (r, s)$, con $r, s > 0$.

2. Consideremos la familia de distribuciones normales bivariadas $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, donde $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $|\rho| < 1$, cuya densidad conjunta es:

$$f(x, y; \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{2(1-\rho^2)} \right\}$$

- (a) Probar que esta familia es exponencial.
 - (b) Encontrar un estadístico suficiente para θ a partir de una m.a. X_1, \dots, X_n .
3. (a) Sea $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial. Probar que el soporte de $f(x; \theta)$ no depende de θ .
- (b) Mostrar que la familia $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 0\}$ no es exponencial.
4. (a) Sea $\{f(\mathbf{x}; \theta_1, \theta_2) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial a dos parámetros en forma canónica (es decir que $c_j(\theta) = \theta_j$). Sea $T = (T_1, T_2)$ el estadístico suficiente canónico (es decir, el estadístico asociado a $(c_1(\theta), c_2(\theta))$). Demostrar que la distribución de $T_2|T_1$ pertenece a una familia exponencial de parámetro θ_2 .
- (b) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Por lo tanto los parámetros canónicos son $\theta_1 = \mu/\sigma^2$ y $\theta_2 = -1/2\sigma^2$, y el estadístico suficiente canónico es $T = (\sum X_i, \sum X_i^2)$. Verificar que la distribución de $\sum X_i^2$ condicional a $\sum X_i$ pertenece a una familia exponencial cuyo parámetro no depende de μ .
- Sugerencia:* usar que $\sum X_i$ y $\sum (X_i - \bar{X})^2$ son independientes.
5. Consideremos X_1, \dots, X_n una m.a. de una $f(\mathbf{x}; \theta)$ que pertenece a una familia exponencial a k parámetros en forma canónica. Sea $\psi(\theta)$ tal que $a(\theta) = \exp\{-\psi(\theta)\}$. Mostrar que el EMV de θ satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_j(\mathbf{X}_i), \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

B) Estimadores IMVL e IMVU.

6. Sea δ_0 un estimador insesgado de $q(\theta)$. Definamos la clase de estadísticos

$$\mathcal{U} = \{U : E_\theta(U) = 0 \quad \forall \theta\}.$$

Probar que cualquier estimador insesgado de $q(\theta)$ es de la forma $\delta = \delta_0 - U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

7. Sea X una v.a. tal que $R_X = \{-1\} \cup \mathbb{N}_0$ cuya función de probabilidad puntual está dada por

$$p_X(-1) = \theta, \quad p_X(k) = (1 - \theta)^2 \theta^k \text{ si } k \in \mathbb{N}_0, \text{ para } \theta \in (0, 1).$$

(a) Sean $\delta_1 = I\{X = -1\}$ y $\delta_2 = I\{X = 0\}$. Probar que δ_1 es un estimador insesgado de $q_1(\theta) = \theta$ y δ_2 es un estimador insesgado de $q_2(\theta) = (1 - \theta)^2$.

(b) Mostrar que $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $U = aX$ para alguna constante $a \in \mathbb{R}$.

Sugerencia: usar que $1/(1-r)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} kr^{k-1}$ si $|r| < 1$.

(c) Se dice que $\delta^*(X_1, \dots, X_n) = \delta^*$ es un *Estimador de Mínima Varianza Local* (IMVL) para $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$ basado en la muestra aleatoria X_1, \dots, X_n si satisface:

★ $E_\theta(\delta^*) = q(\theta) \quad \forall \theta$, es decir es un estimador insesgado de θ

★ Si δ es cualquier otro estimador insesgado de θ , entonces $Var_{\theta_0}(\delta^*) \leq Var_{\theta_0}(\delta)$.

Encontrar los estimadores IMVL de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ en $\theta = \theta_0$.

(d) Probar que existe un estimador IMVU para $q_2(\theta)$ pero no para $q_1(\theta)$.

8. (a) Sea δ un estimador insesgado de $q(\theta)$, demostrar que δ es IMVL de $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$ si y sólo si para todo $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_{\theta_0}(U) < \infty$ se tiene que $E_{\theta_0}(\delta U) = 0$.

(b) Si δ_1 y δ_2 son IMVL de $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$, probar que $P_{\theta_0}(\delta_1 = \delta_2) = 1$.

9. Sea X una v.a. como en el ejercicio 7. Probar que $q(\theta)$ tiene un estimador IMVU si y sólo si es de la forma $q(\theta) = a + b(1 - \theta)^2$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Sugerencia: extender el ejercicio 8 para estimadores IMVU.

10. Sean δ_1 y δ_2 dos estimadores IMVU de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ respectivamente, y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Demostrar que $c_1\delta_1 + c_2\delta_2$ es IMVU de $c_1q_1(\theta) + c_2q_2(\theta)$.

C) Completitud.

11. Consideremos una familia $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ y sea T un estadístico suficiente para \mathcal{P} . Supongamos que $\delta(T)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$. Entonces δ es el único estimador insesgado que es función de T si y sólo si T es completo para \mathcal{P} .

12. **(Teorema de Basu)** Sea T un estadístico suficiente y completo para una familia \mathcal{P} . Si V es un estadístico ancilar (es decir, que su distribución no depende de θ) probar que T y V son independientes.

Sugerencia: probar que $P(V \in A|T) = P(V \in A)$ para todo evento A .

13. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son completos.

14. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, 1)$.

(a) Mostrar que $T = (X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$ es suficiente para μ pero no completo.

- (b) Hallar un estadístico completo y un estimador IMVU de μ .
15. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$. Probar que $X_{(n)}$ es completo para θ .
16. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$, con $\theta \in \Theta \subset (0, 1)$.
- (a) Mostrar que si Θ tiene más de n puntos, el estadístico $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es completo.
- (b) Deducir que \bar{X} es IMVU de θ .
- (c) Mostrar que si Θ tiene más de $n + 1$ puntos, $q(\theta) = \theta/(1 - \theta)$ no es estimable mediante un estimador insesgado.
17. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.
- (a) Mostrar que si σ^2 es conocido, \bar{X} es IMVU para μ .
- (b) Mostrar que si μ es conocido, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ es IMVU para σ^2 .
- (c) Mostrar que si ambos parámetros son desconocidos, entonces \bar{X} es IMVU para μ y s^2 es IMVU para σ^2 .
18. En el ejercicio 13 de la Práctica 2, hallar estimadores IMVU para λ, λ^2 y μ .
19. En el ejercicio 14 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para $q(\theta)$.
20. En el ejercicio 15 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para p .
21. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Hallar un estimador IMVU de θ .
22. Sean X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_m dos m.a. independientes, con distribución $N(\mu, \sigma_1^2)$ y $N(\mu, \sigma_2^2)$ respectivamente. Consideremos el parámetro $\theta = (\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.
- (a) Probar que $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\sum X_i, \sum Y_j, \sum X_i^2, \sum Y_j^2)$ es suficiente para θ pero no completo.
- (b) Supongamos que $r = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ es conocido. Probar que

$$T^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i + r \sum_{j=1}^m Y_j, \sum_{i=1}^n X_i^2 + r \sum_{j=1}^m Y_j^2 \right)$$

- es completo para θ . Hallar un estimador IMVU de μ .
- (c) Probar que no existe un estimador IMVU para μ .

D) Estadísticos minimales suficientes.

23. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son minimales.
24. Sean X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_m muestras aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y $N(\eta, \tau^2)$ respectivamente. Encontrar estadísticos suficientes minimales para θ cuando:
- (a) $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)$, si $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2, \tau^2 > 0$.
- (b) $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2)$, si $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 = \tau^2 > 0$.
- (c) $\theta = (\mu, \sigma^2, \tau^2)$, si $\mu = \eta \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2, \tau^2 > 0$.

E) Desigualdad de Rao–Cramer.

25. Probar que si $f(x; \theta)$ admite derivada segunda respecto de θ y si se puede derivar dentro de la integral, entonces

$$I(\theta) = -E_{\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X; \theta) \right].$$

26. Consideremos una familia $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ y supongamos que se hace una reparametrización $\xi = h(\theta)$ con h biyectiva y derivable. Mostrar que $I(\xi) = I(\theta) / [h'(\theta)]^2$.

27. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$.

(a) Calcular el número de información de Fisher $I_1(\theta)$.

(b) Mostrar que \bar{X} alcanza la cota de Rao–Cramer y deducir que es IMVU para θ .

28. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y sean μ y $\delta^*(T)$ como en el ejercicio 13 de la Práctica 2. Mostrar que aunque $\delta^*(T)$ es un estimador IMVU de μ , la cota de Rao–Cramer es estrictamente menor que $V_{\lambda}(\delta^*(T))$.

29. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$, con σ_0^2 conocido.

(a) Mostrar que \bar{X} es un estimador IMVU para μ , usando la desigualdad de Rao–Cramer.

(b) Mostrar que $\bar{X}^2 - \sigma_0^2/n$ es un estimador IMVU de μ^2 , aunque no alcanza la cota de Rao–Cramer.