

A) Consistencia y distribución asintótica.

1. (a) Sea δ_n un estimador con $V_\theta(\delta_n) < \infty$. Probar que si $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow 0$, entonces δ_n es débilmente consistente.
- (b) Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. tal que $E_\theta(X) = \theta$ y $V_\theta(X) < \infty$. Consideremos el siguiente estimador aleatorizado de θ :

$$\delta_n = (1 - \varepsilon_n) \bar{X} + \varepsilon_n n$$

donde $\varepsilon_n \sim \text{Bi}(1, 1/n)$ y es independiente de las X_i . Probar que δ_n es débilmente consistente, aunque $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow \infty$.

2. Sea Θ un espacio paramétrico finito y δ_n el EMV de θ . Probar que δ_n es débilmente consistente si y sólo si $P_\theta(\delta_n = \theta) \rightarrow 1 \forall \theta \in \Theta$.
3. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Probar que el EMV de θ es fuertemente consistente y asintóticamente eficiente.
4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Consideremos $\delta_n = \bar{X}$ y

$$\delta_n^* = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

- (a) Analizar si estos estimadores de λ son fuertemente consistentes.
- (b) Hallar sus distribuciones asintóticas. Decir si alguno de los dos es asintóticamente eficiente. (NOTA: $E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$)
5. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $U(0, \theta)$.
 - (a) Probar que el EMV de θ es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
 - (b) Probar que el estimador de momentos para θ es fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
 - (c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?
6. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

- (a) Probar que el EMV de θ es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
- (b) Probar que el estimador de momentos para θ es consistente y hallar su distribución asintótica.
- (c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?
7. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de una distribución $F_0(x - \theta)$ con F_0 una función de densidad fija y $\theta \in \mathbb{R}$. Sea δ_n un estimador de θ equivariante por traslaciones (i.e.: para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $\delta_n(x_1 + c, \dots, x_n + c) = \delta_n(x_1, \dots, x_n) + c$). Mostrar que la varianza asintótica de δ_n (si existe) no depende de θ .

8. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución F con densidad $f(x - \mu)$ donde $f(x)$ satisface: i) $f(x) = f(-x)$, ii) $f(x)$ continua en $x = 0$.
- (a) Sea $Z_{a,i} = I\{X_i \leq a\}$. Mostrar que $Z_{a,i}$ tiene distribución $\text{Bi}(1, F(a))$.
- (b) Sea $Z_a = \sum Z_{a,i}$. Mostrar que Z_a tiene distribución $\text{Bi}(n, F(a))$.
- (c) Probar que
- $$P(Z_a \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1) \leq P(\text{mediana}(X_1, \dots, X_n) \leq a) \leq P(Z_a \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)$$
- (d) Mostrar que $\text{mediana}(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador débilmente consistente de μ .
9. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. $N(\theta, 1)$. Definamos el estimador

$$\delta_n = \begin{cases} \bar{X} & \text{si } |\bar{X}| \geq 1/n^{1/4} \\ \frac{1}{2}\bar{X} & \text{si } |\bar{X}| < 1/n^{1/4} \end{cases}$$

Probar que $\sqrt{n}(\delta_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, v(\theta))$ con $v(\theta) = 1/I(\theta) \quad \forall \theta \neq 0$ y $v(0) < 1/I(0)$.

B) Ejercicio para hacer en la computadora.

- Retomemos el ejercicio 1 de la práctica 2 parte D). Para cada uno de los 4 conjuntos de 1000 datos realizar un histograma. Puede decir algo sobre las distribuciones asintóticas de los estimadores?, a que familias pertenecen?, cuáles son sus parámetros?.