

A) Error cuadrático medio. Estimadores insesgados.

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución con parámetro θ . Sea $\hat{\theta}_n = \delta(\mathbf{X})$ un estimador de θ con varianza finita. Si $b(\hat{\theta}_n)$ es el sesgo de $\hat{\theta}_n$, probar que $\text{ECM}(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$.

2. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución tal que existe $E(X_1) = \mu$. Consideremos la clase de estimadores

$$\mathcal{D} = \{ \delta(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \}.$$

(a) Probar que todo $\delta \in \mathcal{D}$ es un estimador insesgado de μ .

(b) Supongamos que existe $V(X) = \sigma^2$. Mostrar que $\bar{X} = \arg \min_{\delta \in \mathcal{D}} V(\delta)$.

3. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución tal que existe $V(X) = \sigma^2$.

(a) Demostrar que

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

es un estimador insesgado de σ^2 .

(b) Sea X_1, \dots, X_n es una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, calcular el $\text{ECM}(s^2)$ y el $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ donde $\tilde{\sigma}^2 = (n-1)s^2/(n+1)$.

(c) Probar que, aunque $\text{ECM}(s^2) > \text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$, la razón entre los ECM tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$.

(d) Mostrar que la contribución del sesgo de $\tilde{\sigma}^2$ a $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ es despreciable cuando $n \rightarrow \infty$ (en el sentido de que la razón entre $b(\tilde{\sigma}^2)^2$ y $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ tiende a 0).

4. Dada una m.a. X_1, \dots, X_n de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$, sea $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ y $\tilde{\theta}_n$ el estimador de θ basado en el primer momento.

(a) Probar que $\tilde{\theta}_n$ es insesgado y que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado.

(b) Calcular el ECM de ambos estimadores. ¿Qué estimador preferiría desde este punto de vista?

B) Estadísticos suficientes.

5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Demostrar que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente para λ :

(a) Aplicando la definición.

(b) Aplicando el Teorema de Factorización.

6. Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución continua $F(x, \theta)$. Demostrar que $T(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ es suficiente para θ .

7. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria. Probar que:

- (a) Si $X_i \sim Bi(n_i, p)$, $1 \leq i \leq n$, con n_i conocidos, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p .
- (b) Si $X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$ es suficiente para (α, λ) .
 Si α es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para λ .
 Si λ es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para α .
- (c) Si $X_i \sim \beta(r, s)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$ es suficiente para (r, s) .
 Si r es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n (1 - X_i)$ es suficiente para s .
 Si s es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para r .
- (d) Si X_i tiene función de probabilidad puntual

$$f(x; \theta, p) = (1 - p)p^{x-\theta} \text{ para } x = \theta, \theta + 1, \theta + 2, \dots$$

con $(\theta, p) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$, entonces $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$ es suficiente para (θ, p) .

Si p es conocido, entonces $X_{(1)}$ es suficiente para θ .

Si θ es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p .

8. Sean X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. $\mathcal{U}(\theta_1, \theta_2)$. Mostrar que $(X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente para θ .
9. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución con densidad

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right\} I_{[\mu, \infty)}(x)$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

- (a) Exhibir un estadístico suficiente bidimensional para (μ, σ) .
- (b) Hallar un estadístico suficiente para μ cuando σ es fijo y conocido.
- (c) Hallar un estadístico suficiente para σ cuando μ es fijo y conocido.
10. Consideremos una familia $\{p(\mathbf{x}, \theta) : \theta \in \Theta\}$ tal que el soporte $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{p}(\mathbf{x}, \theta) > \mathbf{0}\}$ es independiente de θ y $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, con $\theta_1 \in \Theta_1$ y $\theta_2 \in \Theta_2$ variando independientemente. Supongamos que $T_1(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_1 cuando θ_2 es fijo y conocido y que $T_2(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_2 cuando θ_1 es fijo y conocido.
- (a) Demostrar que $T(\mathbf{X}) = (T_1(\mathbf{X}), T_2(\mathbf{X}))$ es suficiente para θ .
- (b) Mostrar que la recíproca de (a) no es cierta en general. Considerar la familia $N(\mu, \sigma^2)$.
11. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución P_θ . Supóngase que $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ . Demostrar que el EMV de θ depende de \mathbf{X} sólo a través de $T(\mathbf{X})$.

C) Estimadores basados en estadísticos suficientes.

12. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$. Luego, $\delta(\mathbf{X}) = X_1$ es un estimador insesgado de θ y $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente.
- (a) Usando el Teorema de Rao-Blackwell, hallar un estimador insesgado $\delta^*(T)$ que sea mejor que δ .
- (b) Probar que $V_\theta(\delta^*) < V_\theta(\delta) \quad \forall \theta$ si $n > 1$.

13. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y $T = \sum_{i=1}^n X_i$ el estadístico suficiente.
- Sea $\mu = e^{-\lambda}$. Mostrar que $\hat{\mu} = I\{X_1 = 0\}$ es un estimador insesgado de μ .
 - Aplicar el Teorema de Rao–Blackwell para obtener un estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que $\hat{\mu}$ y comparar los ECM de ambos estimadores.
14. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$. Dados m y k tales que $k \leq m < n$, se quiere estimar $q(\theta) = \binom{m}{k} \theta^k (1 - \theta)^{m-k}$. Sea $S = \sum_{i=1}^m X_i$ y $h(S) = I\{S = k\}$.
- Probar que $h(S)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$.
 - Construir un estimador insesgado de $q(\theta)$ mejor que $h(S)$.
15. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, 1)$ y $\xi \in \mathbb{R}$ un número fijo y conocido. Se desea estimar $p = P(X_1 \leq \xi)$.
- Mostrar que $I\{X_1 \leq \xi\}$ es un estimador insesgado de p .
 - A partir de $T = \bar{X}$, construir otro estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que el anterior.
Sugerencia: probar y usar que \bar{X} y $X_1 - \bar{X}$ son independientes.

D) Ejercicio para hacer usando la computadora.

El objetivo de este ejercicio es estimar θ , de una población $U(0, \theta)$, para esto tenemos los siguientes 4 estimadores de θ :

- Método de momentos: $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$
- Método de máxima verosimilitud: $\hat{\theta}_2 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$
- Un estimador robusto: $\hat{\theta}_3 = 2 \text{mediana}\{X_1, \dots, X_n\}$
- MV corregido: $\hat{\theta}_4 = (6/5)\hat{\theta}_2$

La propuesta es sin usar herramientas teóricas inferir cual podría dar una mejor estimación. Para esto generemos 1.000 muestras X_1, \dots, X_n de tamaño $n = 5$ de una población $U(0, 1)$ (es decir, buscamos estimar $\theta = 1$.)

- Para cada una de las 1.000 muestras calcular los cuatro estimadores alternativos de θ .
- Para cada uno de los 4 estimadores obtenidos hacer un boxplot y graficar los 4 boxplots en forma paralela. ¿Qué observa? ¿Qué estimador tiene mayor varianza? ¿Hay algún estimador que pareciera sesgado? ¿Qué estimador prefiere?
- Según el gráfico anterior, ¿cuánto vale aproximadamente $P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta)$?