5. TESTS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN NORMAL CON VARIANZA CONOCIDA

5.1 Desarrollo de un ejemplo

Interesa saber si el método de absorción atómica de vapor frío para determinar mercurio introduce errores sistemáticos. Se determina el porcentaje de mercurio en un material estándar de referencia que contiene 38.9% de mercurio, obteniéndose los siguientes valores expresados en porcentaje: 37.9, 37.4, 37.1. Esperamos que el promedio de los valores observados (que en este caso vale $\bar{x} = 37.46$) esté cerca del valor verdadero.

¿Es la diferencia entre el valor promedio observado y el valor medio esperado atribuible al azar, ó es por algo más: presencia de error sistemático?

Podemos plantear la pregunta anterior como una decisión entre las dos hipótesis siguientes:

- Hipótesis nula (H_0): diferencia atribuible al azar
- Hipótesis alternativa (H_a): fue por algo más (error sistemático).

Sea X = porcentaje de mercurio obtenido en una determinación, supongamos que X es una variable aleatoria con distribución $X \sim N(\mu, 1)$. Esto significa que el valor observado es igual a μ más un error que tiene media 0 y varianza 1:

$$X = \mu + \varepsilon$$

$\varepsilon \sim N(0,1)$. Consideremos X1, X2, X3 variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que X, suponemos que los datos (37.9, 37.4, 37.1) son valores observados de dichas variables. Si las mediciones no tienen sesgo μ = 38.9% (μ_0). Si además no se tienen razones para suponer que el sesgo debe ser en algún sentido ya sea mayor o menor, podemos escribir las hipótesis nula y alternativa de la siguiente manera:

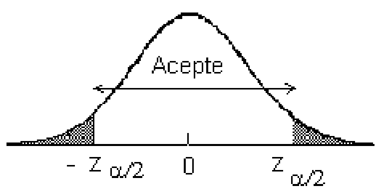
$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad \text{contra} \qquad H_a: \mu \neq \mu_0$$

Esta hipótesis alternativa conduce a un <u>test a dos colas,</u> test bilateral. Esto significa que valores de la media muestral observada suficientemente mayores o suficientemente menores que 38.9% son evidencia a favor de la hipótesis alternativa. Equivalentemente, la hipótesis nula no se rechaza cuando $\bar{x}$ no está demasiado lejos de 38.9%. "Demasiado lejos" corresponde a valores poco probables cuando la hipótesis nula es verdadera. Estos valores constituyen la <u>Región de Rechazo</u> del test.

Si la hipótesis nula es verdadera tenemos

$$Z = \sqrt{3}\,\frac{\bar{X} - 38.9}{1} \sim N(0,1)$$

Regla de decisión a nivel α



Rechazo H0 si $\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}$

No rechazo H0 si $\lvert Z \rvert \le z_{\alpha/2}$

Supongamos que estamos realizando un test con nivel de significación 5%, $z_{0.025} = 1.96$. Para todas las medias muestrales que se encuentren a más de 1.96 desvíos ($\sigma/\sqrt{3}$) de 38.9 el test resultará en rechazo.

¿Qué significa que el test tenga nivel $\alpha = 0.05$? Es la probabilidad de tomar la decisión equivocada de decidir que se están realizando determinaciones con sesgo cuando en realidad las medicones no tienen sesgo.

P (rechazar H0 cuando H0 es verdadera ($\mu = 38.9$)) = $P_{\mu 0}(\lvert Z \rvert > 1.96) = 0.05$

Ejemplo. Continuación.

¿Qué decisión se toma en este caso con $\bar{x} = 37.46$ a nivel α = 0.05?

$$zobs = \sqrt{3}\,\frac{|37.46 - 38.9|}{1} = |-2.49| = 2.49$$

Como el valor observado del estadístico del test es 2.49 y es mayor que 1.96 se rechaza la hipótesis nula. Los datos proveen suficiente evidencia a nivel α = 0.05 para decidir que el método introduce sesgo.

5.2 TESTS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN NORMAL CON VARIANZA CONOCIDA. FORMA GENERAL.

a) TEST BILATERAL

Sea X1, ... , Xn una muestra aleatoria de una población normal, $N(\mu,\sigma^2)$. Interesa testear las <u>hipótesis</u>

H0: $\mu = \mu_0$ contra Ha: $\mu \neq \mu_0$

El <u>estadístico del test</u>

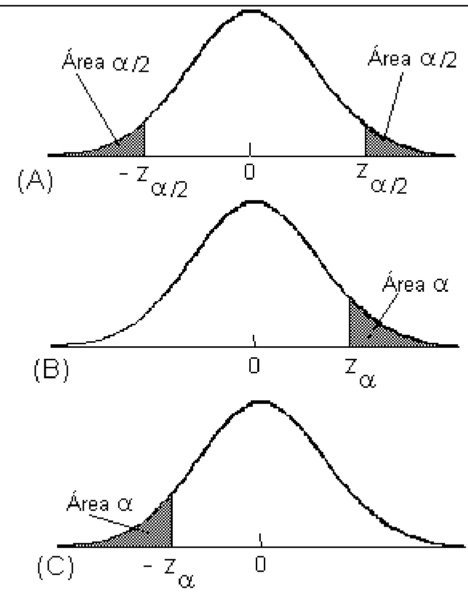
$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$$

tiene distribución N(0,1) cuando $\mu = \mu_0$ (H0 es verdadera)

Región de rechazo ó región crítica de nivel α está dada por: $|Z| > z_{\alpha/2}$

b) c) TESTS UNILATERALES

Al testear la hipótesis nula, H0: $\mu=\mu_0$, hemos elegido rechazarla para aquellos valores de $\overline{X}$ alejados de μ_0. Si sabemos que la única manera en que no ocurre esa hipótesis es con valores de μ mayores que μ_0 , la hipótesis alternativa es
b) Ha: $\mu > \mu_0$. En esta situación no interesa rechazar H0 para valores pequeños de $\overline{X}$ (ya que un valor de $\overline{X}$ pequeño es más probable cuando H0 es verdadera que cuando lo es Ha).



Regiones de rechazo de nivel α , para alternativas bilaterales (A) y para alternativas unilaterales (B) y (C).

Resumen. Tests para la media de una población Normal con varianza conocida

Sea X1, ... , Xn una muestra aleatoria de una población normal, $N(\mu,\sigma^2)$

Hipótesis a testear: tipo a)	Hipótesis a testear: tipo b)	Hipótesis a testear: tipo c)
H0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu \neq \mu_0$	H0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu > \mu_0$	H0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu < \mu_0$

Región de rechazo:	Región de rechazo:	Región de rechazo:
$\lvert Z\rvert > z_{\alpha/2}$	$Z > z_{\alpha}$	$Z < -z_{\alpha}$

donde el estadístico del test es $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$

Es incorrecto utilizar una región de rechazo unilateral cuando en realidad debería utilizarse una bilateral. ¿Por qué? Observe que $z_{\alpha/2} > z_{\alpha}$.

¿Qué significa el nivel del test? Consideremos un test bilateral, en los unilaterales es similar.

P(Rechazar H0, cuando H0 es verdadera) = $P(\lvert Z\rvert > z_{\alpha/2}) = \alpha$

Mediante el nivel α utilizado controlamos la probabilidad de equivocarnos **al rechazar** H0 cuando H0 es verdadera.

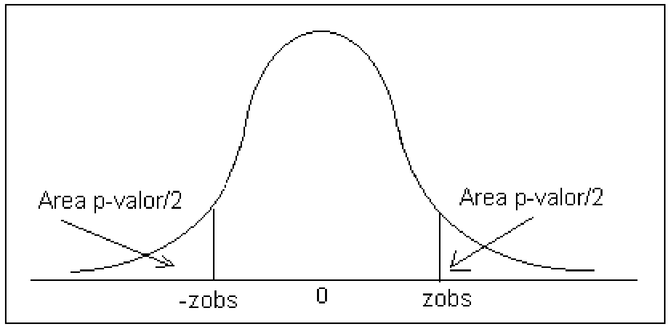
5.3 TIPOS DE ERRORES

	REALIDAD	
DECISIÓN	H0	Ha
H0		Error de Tipo II
Ha	Error de Tipo I	

El nivel del test controla la probabilidad del Error de Tipo I

5.4 P-Valor

En la práctica, se obtiene primero el valor del estadístico del test que resulta de los valores observados. Luego se calcula la probabilidad de que la distribución Normal estándar se obtenga un valor más alejado que el valor observado del estadístico del test. Esta probabilidad, llamada p-valor, da el nivel de significación crítico. Es el nivel que se obtendría al utilizar el valor observado como punto de corte entre la región de rechazo y la región de no rechazo.



p-valor = P(|*Z*|>*zobs*)

Si |*zobs*| > $z_{\alpha/2}$ se rechaza H0

Si |*zobs*| ≤ $z_{\alpha/2}$ no se rechaza H0

Ejemplo. Continuación

$$zobs = \sqrt{3}\,\frac{|\,37.46 - 38.9\,|}{1} = |-2.49| = 2.49$$

y

p-valor = P(|*Z*| >2.49) = 2 P(*Z* > 2.49) =2 x 0.0064 = 0.013

El p-valor es menor que el nivel prefijado 0.05. Rechazamos la hipótesis nula. Cuanto más chico es el p-valor mayor es la evidencia a favor de la hipótesis alternativa.

5.5 PROBABILIDAD DE ERROR DE TIPO II

La probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir <u>aceptar H0 cuando en realidad Ha es verdadera</u> depende del valor μ en el que es verdadera Ha.

$$\beta(\mu) = P_{\mu}\,(\text{aceptar H0}) = P_{\mu}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\}$$

Ahora el μ_0 que aparece restando no es la verdadera media, por lo tanto la expresión dentro del valor absoluto no tiene distribución N(0,1).

$$= P_{\mu}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\} = P_{\mu}\left\{\left|Z+\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\}$$

donde $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$