# Ideas básicas de probabilidad.

objetivo

Inferencia estadística.

Teoría de probabilidades: Descripción matemática de los fenómenos aleatorios que surgen al realizar experimentos aleatorizados o al tomar muestras aleatorias.

Experimento aleatorio (ε)

Diremos que un fenómeno es un experimento aleatorio , cuando el resultado de una repetición es incierto pero las frecuencias relativas de los resultados tienden a un patrón de distribución regular en un gran número de repeticiones.

| |
|---|
| La idea de probabilidad comienza con la observación: las *frecuencias relativas* de los resultados de fenómenos aleatorios *se estabilizan*. |

Supongamos que se arroja una moneda, la frecuencia relativa de caras es errática en una, dos. cinco o diez tiradas. Pero después de miles de tiradas cambia muy poco.

- El naturalista francés Buffon (1707-1788) arrojó 4040 veces una moneda. Resultado: 2048 caras o *frecuencia relativa* (caras) = 0.5069.
- Alrededor de 1900 un estadístico inglés ,Karl Pearson, arrojó 24 000 veces una moneda. Resultado: 12 012 caras, *fr* (caras) = 0.5005.
- Prisionero durante la segunda guerra mundial, el matemático inglés John Kerrich arrojó una moneda 10 000 veces. Resultado: 5067 caras fr (caras) = 0.5067.

Si en muchas tiradas de una moneda *la proporción de caras observadas* está muy cerca de 1/2, diremos que la *probabilidad de cara en una tirada* es 1/2.

En términos intuitivos la probabilidad es la frecuencia relativa a largo plazo.

No podemos observar una probabilidad exactamente.

En el caso de la moneda, tendríamos que continuar arrojándola siempre.

La probabilidad es una idealización basada en imaginar qué le ocurriría a las frecuencias relativas en una sucesión indefinidamente larga de pruebas.

Espacio muestral ($\Omega$)

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos sus resultados posibles.

Para especificar $\Omega$ debemos indicar qué constituye un resultado individual y después cuáles resultados pueden ocurrir.

**Ejemplo**: Se arroja una moneda cuatro veces ($\varepsilon_1$) y se registra el resultado. Esto es demasiado vago.

Para ser más específicos: se registra el resultado de cada una de las tiradas *en orden*. Un resultado típico de es CSSC (C=cara, S=ceca).

El espacio muestral $\Omega_1$ consiste de todas las sucesiones de longitud 4 de letras C´s y S´s.

Si solamente estamos interesados en la cantidad de caras:

$$\Omega_2 =\{ 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Es importante especificar cuidadosamente un resultado individual.

Suceso o evento

Conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio, es un subconjunto del espacio muestral.

**Ejemplo**:

A = Exactamente 2 caras

A=[CCSS, CSCS, CSSC, SCCS, SCSC, SSCC}

Es un ***suceso compuesto***.

Un suceso formado por un único resultado se llama ***suceso elemental***.

Los sucesos que no tienen resultados en común se llaman ***sucesos disjuntos*** ó *incompatibles*.

## Variables aleatorias

Nuestro objetivo es describir el comportamiento aleatorio de los estadísticos. Éstos son números que obtenemos a partir de una muestra.

| Una *variable aleatoria* es un resultado numérico que se obtiene a partir de un experimento aleatorio. |
|---|

Las variables aleatorias serán indicadas por letras mayúsculas.

**Ejemplo**: Sea X = cantidad de caras obtenidas al arrojar una moneda 4 veces. Los valores posibles de X ($R_X$) son 0, 1, 2, 3, y 4.

Si arrojamos la moneda cuatro veces dará a X uno de esos valores posibles. Al arrojar la moneda nuevamente 4 veces obtendremos otro valor, probablemente diferente.

X se llama variable aleatoria pues sus valores varían cuando la moneda es arrojada (4 veces) repetidas veces. Si para $\varepsilon_1$elegimos el espacio muestral más detallado ($\Omega_2$) y ocurre CSSC, entonces X =2. Esto es: X(CSSC)=2, también X(CCSS)=2 y X(SSSS)=0. X asigna un número a cada resultado de $\Omega_2$.

X es una función de $\Omega_2$ en los reales.

**Axiomas.**

Escribiremos P(A) a la probabilidad del suceso A.
¿Qué propiedades debe tener cualquier asignación de probabilidades?

- La frecuencia relativa es un número entre cero y uno.
- El espacio muestral $\Omega$ tiene todos los resultados posibles por lo tanto tiene frecuencia 1.

Tenemos así los dos primeros axiomas que toda asignación de probabilidades debe cumplir para A un suceso de $\Omega$

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\Omega) = 1$

Dos sucesos disjuntos no pueden ocurrir en la misma repetición de un experimento.

La frecuencia relativa en muchas repeticiones de que ocurra "uno o el otro" ocurra, es la **suma de las frecuencias relativas** individuales.

Luego el otro axioma que una asignación de probabilidades legítima debe cumplir es **la regla de adición para sucesos disjuntos**:

c) Si los sucesos A y B son disjuntos, entonces P(A ó B) = P(A) + P(B)

****** Axioma c) para más de dos sucesos disjuntos *************

**Ejemplo**: El experimento consiste en arrojar una moneda,

$$\Omega = \{C, S\}$$

Si creemos que la moneda está equilibrada luego asignamos

$$P(C)=1/2$$
$$P(S)=1/2$$

Si la observación nos convence de que está cargada de manera que las cecas ocurren con más frecuencia podríamos asignar las probabilidades

$$P(C)=0.4$$
$$P(S)=0.6$$

Podríamos determinar cuál de las dos asignaciones es la adecuada para una moneda en particular realizando muchas tiradas ó quizás analizando detalladamente el peso y balance de la moneda. Cualquiera de las dos asignaciones cumple con los axiomas y es por lo tanto **matemáticamente correcta.**

## Probabilidades en un espacio muestral finito

1. Asigne una probabilidad a cada suceso elemental. Estas probablidades deben ser números entre 0 y 1 y deben sumar 1.
2. La probabilidad de cualquier suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

## Espacio de equiprobabilidad.

Un espacio muestral finito en el que se asigna la misma probabilidad a los sucesos elementales se llama *espacio de equiprobabilidad*. Si A es un suceso de un espacio de equiprobabilidad entonces:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{cantidad de resultados de A}}{\text{cantidad de resultados del espacio muestral}} = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

## Complemento de un suceso

Si A es un suceso, de un espacio muestral cualquiera, el suceso: A no ocurre se llama suceso complementario de A, y se lo denota $\overline{A}$.

## Propiedades útiles para el cálculo de probabilidades.

$$1)\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$2)\ P(\Phi) = 0$$

$$3)\ P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

**Ejemplo:** Se arroja dos veces una **moneda cargada** (P(C)=1/3, P(S)=2/3)) y se registra el resultado del primero y del segundo tiro

D = {CC, CS, SC, SS}

Como la moneda no está equilibrada, no es razonable asignar equiprobabilidad a los sucesos elementales, asignamos

P(CC)=1/9 P(CS)=2/9 P(SC)=2/9 P(SS)=4/9,

luego $P(\Omega)$ = 1/9+2/9+2/9+4/9 =1. Tenemos definido un **espacio de probabilidad.**

Sean A: "Salió cara en el primer tiro" B:"Salió cara en el segundo tiro"

| | |
|---|---|
| A = {CS, CC}<br>B = {SC, CC} | P(A) = 2/9 + 1/9 = 1/3<br>P(B) = 2/9 + 1/9 = 1/3 |
| A y B = {CC} = $A \cap B$ | $P(A \cap B)$ = 1/9 |
| A ó B = {CS, SC, CC} = $A \cup B$ | $P(A \cup B)$ = 2/9 + 2/9 + 1/9 = 5/9<br>$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = 1/3 + 1/3 - 1/9 |

Calculemos
P(Salió cara en el primer tiro ó en el segundo tiro)= P(A ó B)

| | |
|---|---|
| A ó B = {CS, SC, CC} = $A \cup B$ | $P(A \cup B) = 2/9 + 2/9 + 1/9 = 5/9$<br>$=P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/3 - 1/9$ |

Pero el suceso

"Salió cara en el primer tiro ó en el segundo tiro"

es igual al suceso

C: "Salió cara por lo menos una vez"

y

$$\overline{C}: \text{"ninguna vez salió cara"}$$

luego

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 4/9 = 5/9$$

**Independencia**

Seguimos con el ejemplo:

| | | Primer Tiro | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Cara | Ceca | |
| Segundo Tiro | Cara | 1/9 | 2/9 | 3/9 = 1/3 |
| | Ceca | 2/9 | 4/9 | 6/9 = 2/3 |
| | | 3/9 = 1/3 | 6/9 = 2/3 | |

Obtendríamos exactamente las mismas probabilidades si en vez de arrojar la moneda 2 veces realizáramos una extracción de una urna que tiene las siguientes 9 fichas:

| |
|---|
| C C |
| C S |
| S S |

| |
|---|
| S C |
| C S |
| S S |

| |
|---|
| S C |
| S S |
| S S |

La siguiente tabla es una tabla de frecuencias indicando la cantidad de fichas en cada celda

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Primer Tiro</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Cara</td><td>Ceca</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Segundo Tiro</td><td>Cara</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Ceca</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Calculemos la probabilidad de *cara en segundo* tiro **sabiendo** que salió *cara en el primero*, esto es que nos debemos restringir a las fichas que tienen una C en el primer lugar = P(B / A) = 1 / 3. Análogamente calculamos *cara en segundo* tiro **sabiendo** que salió *ceca en el primero*, $P(B/\bar{A}) = 2 / 6 = 1 / 3$.

Luego tenemos que

$$P(B) = P(B/A) = P(B/\bar{A}) = 1 / 3$$

| |
|---|
| Dos sucesos A y B se dicen <u>independientes</u> si saber que A ocurrió o no, no modifica la probabilidad de que B ocurra. |

Siguiendo con el ejemplo:

$$P(B/A) = \frac{1}{3} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

La **probabilidad condicional** de B sabiendo que A ocurrió, P(B/A) se define como

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

siendo $P(A) > 0$.

Si $P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B)\, P(A)$.

Esto motiva la siguiente **definición**

A y B son sucesos independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

**Siguiendo con el ejemplo**: los sucesos "cara en la primera tirada" y "cara en la segunda tirada" son independientes. Más aún cualquier suceso referido únicamente a la primera tirada es independiente de cualquier suceso referido a la segunda tirada. Decimos que las tiradas son independientes.

**Regla del producto**

si $P(A) > 0$ $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

Es muy útil cuando un experimento consta de varias etapas, por ejemplo si consta de 3 etapas, con $A_i$ un suceso referido a la etapa i, tenemos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2))$$

siempre que $P(A_1) > 0$ y $P(A_1 \cap A_2) > 0$

<u>Independencia de 3 o más sucesos</u>:

A y B son sucesos independientes si P( A / B ) = P ( A ), para esto alcanzaba con que $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Para 3 sucesos A, B, y C nos interesa

i) P( A / B ) = P ( A ) ii) P( A / (B ∩ C)) = P ( A )

Es necesario pedir que

P(A ∩ B) = P(A)P(B)
P(B ∩ C) = P(B)P(C)
P(C ∩ A) = P(C)P(A)

y además que P(A ∩ B ∩ C) = P(A)P(B)P(C)

<u>Para que n sucesos</u> $A_1, A_2, ..., A_n$ sean independientes, la probabilidad de la intersección de k de ellos debe ser igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos, para todo $k = 2, ..., n$ :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} .... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) .... P(A_{i_k})$$

Es decir que es necesario verificar $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$ condiciones.