Para la construcción de todos los intervalos de confianza hemos partido de una función que depende de la muestra y del parámetro para el cual nos interesa construir el intervalo. La función es una nueva variable aleatoria cuya distribución es conocida. Este es un procedimiento general que describimos a continuación.

**MÉTODO GENERAL PARA OBTENER INTERVALOS DE CONFIANZA**. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución que depende de un parámetro $\theta$. Supongamos que existe una función $T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ (es decir, una función de la muestra y del parámetro) cuya distribución es conocida y no depende de $\theta$ ni de ningún otro parámetro desconocido. Entonces, como la distribución de $T$ es conocida, se pueden hallar dos valores *a* y *b* tales que

$$P\left(a \le T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) \le b\right) = 1 - \alpha$$

A partir de esta expresión, si $T$ es una función monótona de $\theta$, es posible despejar $\theta$ de la expresión anterior y obtener un intervalo de confianza para $\theta$.

La función $T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ se denomina <u>pivote.</u>

<u>Ejemplo:</u> Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución exponencial de parámetro $\lambda$. Hemos visto que la suma de v.a. exponenciales independientes es una v.a con distribución Gamma, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Vale además que si $V \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $a > 0$ entonces $aV \sim \Gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{a}\right)$. Luego

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n} = \Gamma\left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La función $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ , que depende del parámetro de interés y cuya distribución es conocida ( $\chi^2_{2n}$ ), permitió construir intervalos de confianza para $\lambda$ (sección 4)

**INTERVALOS DE CONFIANZA DE NIVEL APROXIMADO PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN CUALQUIERA**

Muchas veces se desconoce la distribución de los datos y en otras es muy difícil hallar la distribución exacta de la función pivote. Utilizaremos el teorema central del límite para obtener una función pivote cuya distribución será conocida aproximadamente. Esta función nos permitirá despejar un intervalo de confianza. Pero el precio que hay que pagar es la pérdida del nivel exacto. Ya hemos visto un ejemplo de esta situación cuando obtuvimos intervalos de confianza con nivel aproximado para el parámetro p de una distribución Binomial (sección 3.1).

Consideremos ahora una m.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ de una distribución F, cualquiera, tal que E($X_i$) = $\mu$ y V($X_i$) = $\sigma^2 < \infty$. Nos interesa hallar un intervalo de confianza para $\mu$.

Sabemos que $\overline{X}$ es un estimador insesgado y consistente de $\mu$. No conocemos su distribución exacta porque no conocemos la de $X_i$, pero sabemos que

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Si $\sigma^2$ fuera conocido, esta función podría servir de pivote para el intervalo de nivel aproximado, pero ¿qué usamos si $\sigma^2$ es desconocido?

<u>Propiedad</u>:

$$\left.\begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{D} Y \\ U_n \xrightarrow{p} a \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad U_n Y_n \xrightarrow{D} aY$$

Como $s \xrightarrow{p} \sigma$ por ser un estimador consistente, entonces $\frac{s}{\sigma} \xrightarrow{p} 1$ y $\frac{\sigma}{s} \xrightarrow{p} 1$.
Luego,

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1) \\ \dfrac{\sigma}{s} \xrightarrow{p} 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{s} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

A partir de este resultado,

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{s} \le z_{\alpha/2}\right) \to 1-\alpha$$

y se obtiene el siguiente <u>intervalo de confianza para $\mu$</u>, de <u>nivel aproximado</u> 1 - $\alpha$

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$