

Ideas básicas de probabilidad.
objetivo
Inferencia estadística.

Experimento aleatorio (ε)

Diremos que un fenómeno es un experimento aleatorio, cuando el resultado de una repetición es incierto pero las frecuencias relativas de los resultados tienden a un patrón de distribución regular en un gran número de repeticiones.

La idea de probabilidad comienza con la observación: las *frecuencias relativas* de los resultados de fenómenos aleatorios *se estabilizan*.

Supongamos que se arroja una moneda, la frecuencia relativa de caras es errática en una, dos, cinco o diez tiradas. Pero después de miles de tiradas cambia muy poco.

- El naturalista francés Buffon (1707-1788) arrojó 4040 veces una moneda. Resultado: 2048 caras o *frecuencia relativa* (caras) = 0.5069.
- Alrededor de 1900 un estadístico inglés, Karl Pearson, arrojó 24 000 veces una moneda. Resultado: 12 012 caras, *fr* (caras) = 0.5005.
- Prisionero durante la segunda guerra mundial, el matemático inglés John Kerrich arrojó una moneda 10 000 veces. Resultado: 5067 caras *fr* (caras) = 0.5067.

Si en muchas tiradas de una moneda *la proporción de caras observadas* está muy cerca de $1/2$, diremos que la *probabilidad de cara en una tirada* es $1/2$.

La proporción de caras observadas en n tiradas, es también llamada ***frecuencia relativa*** de cara, $f_r(\text{cara})$

En términos intuitivos la probabilidad es la frecuencia relativa a largo plazo.

No podemos observar una probabilidad exactamente.

En el caso de la moneda, tendríamos que continuar arrojándola siempre.

La probabilidad es una idealización basada en imaginar qué le ocurriría a las frecuencias relativas en una sucesión indefinidamente larga de pruebas.

Espacio muestral (Ω)

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos sus resultados posibles.

Para especificar Ω debemos indicar qué constituye un resultado individual y después cuáles resultados pueden ocurrir.

Ejemplo: Se arroja una moneda cuatro veces (ε_1) y se registra el resultado. Esto es demasiado vago.

Para ser más específicos: se registra el resultado de cada una de las tiradas *en orden*. Un resultado típico de es CSSC (C=cara, S=ceca).

El espacio muestral Ω_1 consiste de todas las sucesiones de longitud 4 de letras C's y S's.

Si solamente estamos interesados en la cantidad de caras:

$$\Omega_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

Es importante especificar cuidadosamente un resultado individual.

Suceso o evento

Un suceso es un conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio, es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo:

$A = \text{Exactamente 2 caras}$

Si solamente estamos interesados en la cantidad de caras y consideramos el espacio muestral Ω_2 A es un suceso formado por un solo elemento ($A=2$), es **suceso elemental**. En cambio si nos interesa describir el experimento con Ω_1

$$A = \{CCSS, CSCS, CSSC, SCCS, SCSC, SSSC\}$$

es un **suceso compuesto**.

Los sucesos que no tienen resultados en común se llaman **sucesos disjuntos** ó **incompatibles**.

Propiedades de las frecuencias relativas

Llamemos frecuencia relativa de un suceso A , $f_r(A)$ a la proporción de veces que se observa la ocurrencia del suceso cuando se repite el experimento aleatorio n veces.

Entonces

- La frecuencia relativa de un suceso cualquiera es un número entre cero y uno: $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- El espacio muestral Ω tiene todos los resultados posibles por lo tanto tiene frecuencia relativa 1. $f_r(\Omega) = 1$
- La frecuencia relativa de dos **sucesos disjuntos** de que ocurra “uno o el otro” ocurra, es la **suma de las frecuencias relativas** individuales.
 $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

Axiomas de Probabilidad.

Escribiremos $P(A)$ a la probabilidad del suceso A .

¿Qué propiedades debe tener cualquier asignación de probabilidades? Como mínimo las mismas propiedades que tiene la frecuencia relativa.

Tenemos así los axiomas que toda asignación de probabilidades debe cumplir para un suceso A de Ω

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\Omega) = 1$

c) Si los sucesos A y B son disjuntos, entonces $P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B)$

Axioma c) para más de dos sucesos disjuntos $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Ejemplo: El experimento consiste en arrojar una moneda,

$$\Omega = \{C, S\}$$

Si creemos que la moneda está equilibrada luego asignamos

$$P(C) = 1/2$$

$$P(S) = 1/2$$

Si la observación nos convence de que está cargada de manera que las cecas ocurren con más frecuencia podríamos asignar las probabilidades

$$P(C) = 0.4$$

$$P(S) = 0.6$$

Podríamos determinar cuál de las dos asignaciones es la adecuada para una moneda en particular realizando muchas tiradas ó quizás analizando detalladamente el peso y balance de la moneda. Cualquiera de las dos

asignaciones cumple con los axiomas y es por lo tanto **matemáticamente correcta**.

Probabilidades en un espacio muestral finito

1. Asigne una probabilidad a cada suceso elemental. Estas probabilidades deben ser números entre 0 y 1 y deben sumar 1.
2. La probabilidad de cualquier suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Espacio de equiprobabilidad.

Un espacio muestral finito en el que se asigna la misma probabilidad a los sucesos elementales se llama *espacio de equiprobabilidad*. Si A es un suceso de un espacio de equiprobabilidad entonces:

$$P(A) = \frac{\text{cantidad de resultados de } A}{\text{cantidad de resultados del espacio muestral}} = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Complemento de un suceso

Si A es un suceso, de un espacio muestral cualquiera, el suceso: A no ocurre se llama suceso complementario de A , y se lo denota \bar{A} .

Propiedades útiles para el cálculo de probabilidades.

- 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 2) $P(\emptyset) = 0$
- 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostraremos esta última propiedad:

$A \cup B$ puede escribirse como la siguiente unión disjunta $A \cup (B \cap \bar{A})$ luego

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (1)$$

$$\text{Pero } P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (2)$$

de (1) y (2) resulta inmediatamente la propiedad que queríamos demostrar.

Ejemplo: Se arroja dos veces una **moneda cargada** ($P(C)=1/3$, $P(S)=2/3$) y se registra el resultado del primero y del segundo tiro

$$D = \{CC, CS, SC, SS\}$$

Como la moneda no está equilibrada, no es razonable asignar equiprobabilidad a los sucesos elementales, asignamos

$$P(CC)=1/9 \quad P(CS)=2/9 \quad P(SC)=2/9 \quad P(SS)=4/9,$$

luego $P(\Omega) = 1/9+2/9+2/9+4/9 = 1$. Tenemos definido un **espacio de probabilidad**.

Sean A: "Salió cara en el primer tiro" B:"Salió cara en el segundo tiro"

A = {CS, CC}	P(A) = 2/9 + 1/9 = 1/3
B = {SC, CC}	P(B) = 2/9 + 1/9 = 1/3
A y B = {CC} = A ∩ B	P(A ∩ B) = 1/9
A ó B = {CS, SC, CC} = A ∪ B	P(A ∪ B) = 2/9 + 2/9 + 1/9 = 5/9 = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) = 1/3 + 1/3 - 1/9

Calculemos

$$P(\text{Salió cara en el primer tiro ó en el segundo tiro}) = P(A \cup B)$$

$A \text{ ó } B = \{CS, SC, CC\} = A \cup B$	$P(A \cup B) = 2/9 + 2/9 + 1/9 = 5/9$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/3 - 1/9$
--	--

Pero el suceso

“Salió cara en el primer tiro ó en el segundo tiro”
es igual al suceso

C: “Salió cara por lo menos una vez”

y

\bar{C} : “ninguna vez salió cara”

luego

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 4/9 = 5/9$$

Independencia

Seguimos con el ejemplo:

		Primer Tiro		
		Cara	Ceca	
Segundo Tiro	Cara	1/9	2/9	3/9 = 1/3
	Ceca	2/9	4/9	6/9 = 2/3
		3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	

Obtendríamos exactamente las mismas probabilidades si en vez de arrojar la moneda 2 veces realizáramos una extracción de una urna que tiene las siguientes 9 fichas:

C C	S C	S C
C S	C S	S S
S S	S S	S S

La siguiente tabla es una tabla de frecuencias indicando la cantidad de fichas en cada celda

		Primer Tiro		
		Cara	Ceca	
Segundo Tiro	Cara	2	2	3
	Ceca	2	4	6
		3	6	

Calculemos la probabilidad de *cara en segundo tiro sabiendo* que salió *cara en el primero*, esto es que nos debemos restringir a las fichas que tienen una C en el primer lugar = $P(B / A) = 1 / 3$. Análogamente calculamos *cara en segundo tiro sabiendo* que salió *ceca en el primero*, $P(B / \bar{A}) = 2 / 6 = 1 / 3$.

Luego tenemos que

$$P(B) = P(B/A) = P(B/\bar{A}) = 1 / 3$$

Dos sucesos A y B se dicen independientes si saber que A ocurrió o no, no modifica la probabilidad de que B ocurra.

Siguiendo con el ejemplo:

$$P(B/A) = \frac{1}{3} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

La **probabilidad condicional** de B sabiendo que A ocurrió, $P(B/A)$ se define como

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

siendo $P(A) > 0$.

$$\text{Si } P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B) P(A).$$

Esto motiva la siguiente **definición**

$$A \text{ y } B \text{ son sucesos independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Siguiendo con el ejemplo: los sucesos “cara en la primera tirada” y “cara en la segunda tirada” son independientes. Más aún cualquier suceso referido únicamente a la primera tirada es independiente de cualquier suceso referido a la segunda tirada. Decimos que las tiradas son independientes.

Regla del producto

$$\text{si } P(A) > 0 \quad P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Es muy útil cuando un experimento consta de varias etapas, por ejemplo si consta de 3 etapas, con A_i un suceso referido a la etapa i , tenemos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | (A_1 \cap A_2))$$

siempre que $P(A_1) > 0$ y $P(A_1 \cap A_2) > 0$

Independencia de 3 o más sucesos:

A y B son sucesos independientes si $P(A/B) = P(A)$, para esto alcanzaba con que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Para 3 sucesos A, B, y C nos interesa

$$\text{i) } P(A/B) = P(A) \quad \text{ii) } P(A/(B \cap C)) = P(A)$$

Es necesario pedir que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(C)P(A)$$

y además que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Para que n sucesos A_1, A_2, \dots, A_n sean independientes, la probabilidad de la intersección de k de ellos debe ser igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos, para todo $k = 2, \dots, n$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Es decir que es necesario verificar $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$ condiciones.

Ejemplos varios

Ejemplo 1: una urna contiene tres bolitas blancas numeradas del 1 al 3, tres bolitas rojas numeradas del 1 al 3 y tres bolitas rayadas numeradas del 1 al 3, la bolita 1 rayada es nueva, la bolita 2 roja es nueva y la bolita 3 blanca es nueva. Consideremos los sucesos

A= la bolita es rayada

B= la bolita es nueva

C= la bolita es la nro. 1

A, B, son sucesos independientes de a pares pero no son sucesos independientes de a tres.

Consideremos el siguiente experimento aleatorio: se extrae de una caja un elemento por vez, k veces

i) si las extracciones se realizan sin reposición entonces las extracciones son dependientes.

ii) si las extracciones se realizan con reposición entonces son independientes.

Ejemplo 2: se realizan dos extracciones con reposición de una urna que contiene 5 fichas numeradas del 1 al 5

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) / x_i \in N \text{ y } 1 \leq x_i \leq 5 \} \quad \# \Omega = 5 * 5 = 25$$

Ω es un espacio de equiprobabilidad

Consideremos los siguientes sucesos

A1= 1ra. extracción es 1 A2= 1ra extracción es 2

B4= 2da. extracción es 4

$$B4 = \{ (x_1, 4) / x_i \in N \text{ y } 1 \leq x_1 \leq 5 \} \quad \# B4 = 5$$

$$P(B4) = \#B4 / \#\Omega = 1/5$$

$$P(B4/A1) = P(B4 \cap A1) / P(A1) = 1 / 5$$

$$P(B4/A2) = 1 / 5$$

La probabilidad de B4 no cambia con el conocimiento de lo que ocurrió en la primera extracción, obtendríamos resultados análogos con cualquier valor para la 1ra. extracción y cualquier valor para la segunda extracción.

Decimos que las extracciones son independientes.

Ejemplo 3: igual que en el ejemplo anterior pero sin reposición

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) / x_i \in N \text{ y } 1 \leq x_i \leq 5 \text{ } x_1 \neq x_2 \} \quad \# \Omega = 5 * 4 = 20$$

Consideremos los sucesos

$A_1 =$ 1ra. extracción es 1 $A_2 =$ 1ra extracción es 2 $A_4 =$ 1ra extracción es 4
 $B_4 =$ 2da. extracción es 4

$$B_4 = \{ (x_1, 4) / x_i \in N \text{ y } 1 \leq x_1 \leq 5 \} \quad \# B_4 = 4$$

$$P(B_4) = \#B_4 / \#\Omega = 4/20 = 1 / 5 \quad \text{igual que antes !!!!! Pero}$$

$$P(B_4/A_1) = P(B_4 \cap A_1) / P(A_1) = 1 / 4$$

$$P(B_4/A_2) = 1 / 4 \quad P(B_4/A_4) = 0$$

La probabilidad condicional de B_4 sí cambia con el conocimiento de lo que ocurrió en la primera extracción, Decimos que las extracciones son dependientes.