Variables Aleatorias Continuas

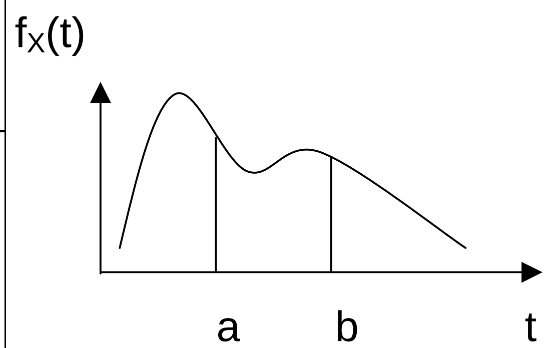
Hemos visto que una variable aleatoria continua X se caracteriza por su función de densidad de probabilidad f_X que cumple

a)

$$f_X(t) \geq 0$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1$$



c)

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\, dt$$

Cualquier función positiva e integrable puede ser la función de densidad de alguna variable aleatoria.

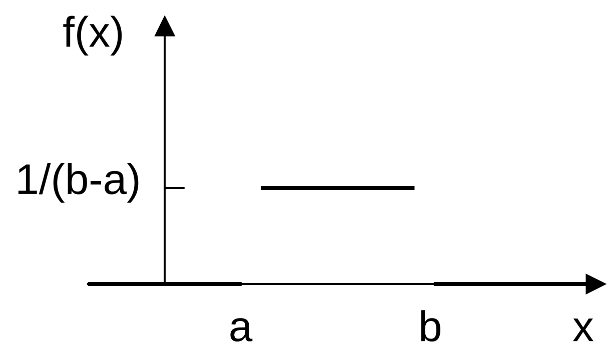
Ya hemos visto cómo a partir de la función $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ podemos obtener la familia de densidades normales ó gaussianas.

Estudiaremos otras funciones a partir de las cuales se obtienen familias de densidades.

Distribución Uniforme

Diremos que una v.a. X tiene distribución uniforme en el intervalo (a,b), X ~U [a,b], si su función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$



Esta variable corresponde al experimento ideal de elegir un número al azar en el intervalo (a,b).

$$\text{Si } X \sim U\,[a,b] \Rightarrow \quad E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Obtendremos la Distribución Gamma

Primero observemos que para cada $\alpha > 0$, la expresión

$$x^{\alpha-1}e^{-x}$$

representa una curva positiva e intergable en el intervalo $[\alpha, +\infty)$.

Su integral es la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

<u>Propiedades</u>

a) $\forall \alpha > 1 \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\, \Gamma(\alpha - 1)$

b) $\Gamma(1) = 1$

c) $\forall n \in N \quad \Gamma(n) = (n-1)!$

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

e) mediante el cambio de variable, x = λy en la integral que define a la función Gamma, obtenemos un parámetro más en la expresión de las curvas:

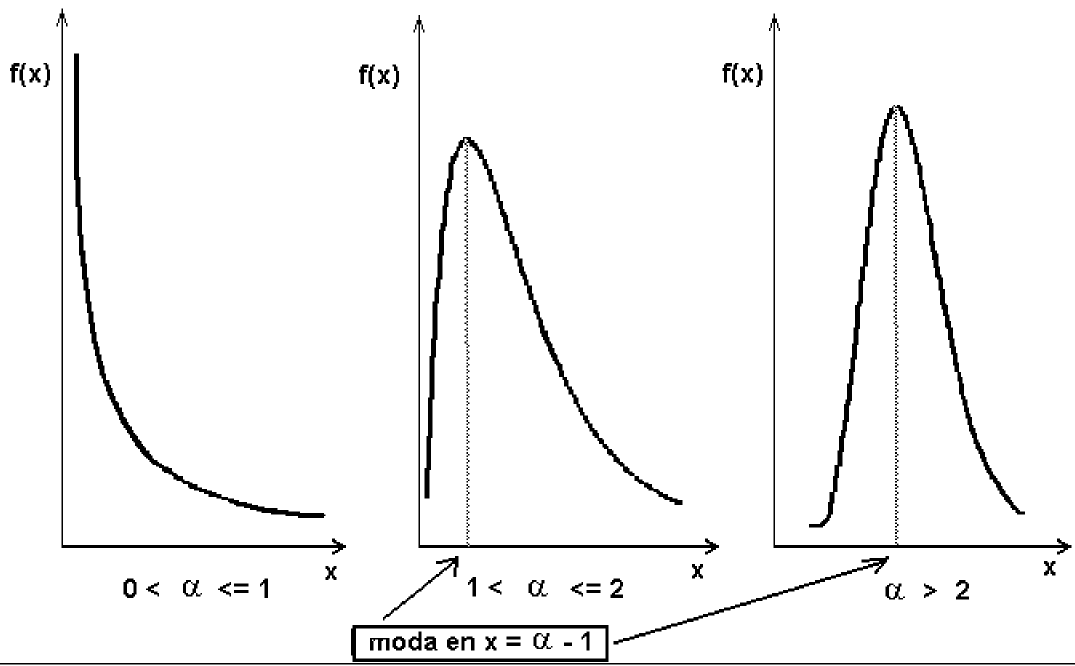
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}\, dy$$

El integrando dividido su integral nos da la familia de densidades buscada:

X ~ $\Gamma(\alpha, \lambda)$ si su función de densidad está dada por

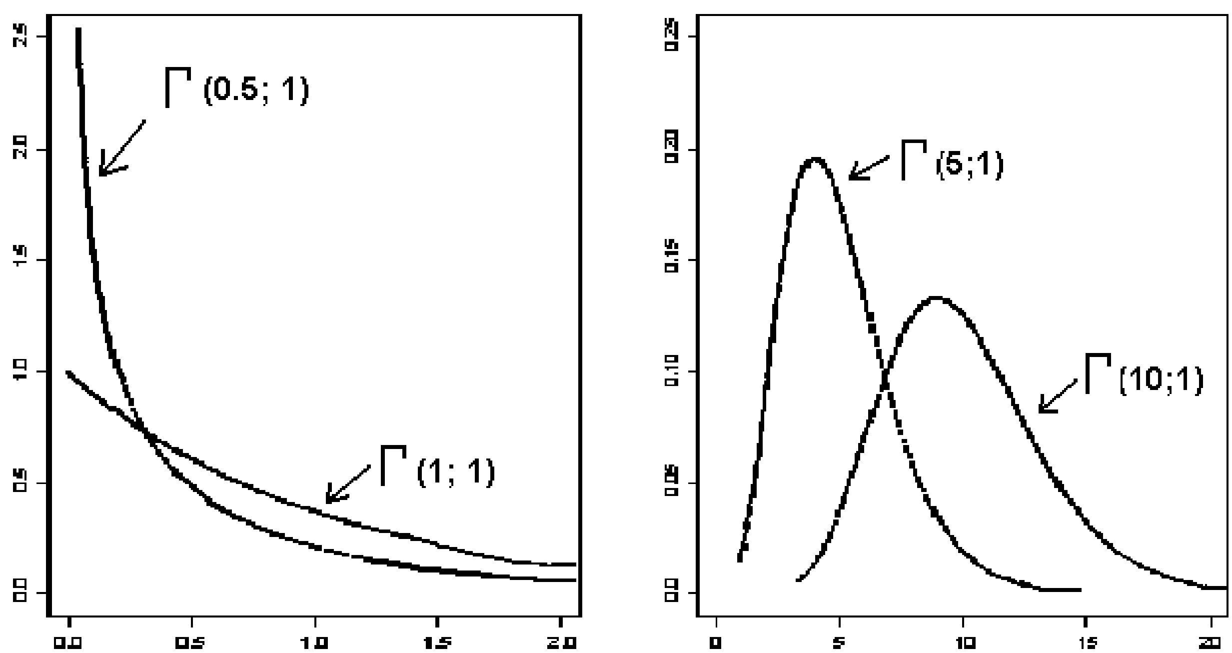
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Decimos que **X tiene distribución Gamma de parámetros** α **y** λ



α es el parámetro de forma
λ es el parámetro de escala

Si X ~ $\Gamma(\alpha,\lambda) \Rightarrow$ E(X) = α / λ Var (X) = α / λ^2



Casos particulares

Si α = 1, la distribución resultante se llama exponencial:

Si $X \sim \Gamma(1, \lambda) \Rightarrow X \sim \varepsilon(\lambda)$

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda y}\, dy = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Observación: la función de distribución acumulada F de una variable exponencial tiene una expresión explícita simple.

Ejemplo: Si X_t mide la cantidad de ocurrencias en un Proceso de Poisson de parámetro λ :

a) El tiempo de espera hasta la 1ra. ocurrencia es una variable aleatoria con distribución $\varepsilon(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.
b) El tiempo de espera hasta la *r* - ésima ocurrencia es una variable aleatoria con distribución $\Gamma(r, \lambda)$.

Distribución ji-cuadrado

Se dice que X ~ χ^2_n **,** o sea X tiene distribución ji-cuadrado con n grados de libertad si X ~ $\Gamma(n/2, 1/2)$

Propiedades

a) E(X) = n Var(X) = 2n

b) $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1$