Sumas y Promedios de Variables Aleatorias

Definición: Sea X_1, ..., X_n una colección de n variables aleatorias, diremos que esas variables constituyen una muestra aleatoria de tamaño n si

(a) las Xi's son v.a. independientes
(b) cada Xi tiene la misma distr. de probabilidad

Cuando se cumplan (a) y (b) diremos en forma indistinta que las Xi's son v.a. independientes e identicamente distribuidas (v.a. i.i.d.)

Hemos visto que:

1) si los valores observados se obtienen mediante un muestreo aleatorio con reposición de una población finita, (a) y (b) se cumplen exactamente
2) si el muestreo se realiza sin reposición de una población finita de tamaño N mucho mayor que el tamaño muestral n, (a) y (b) se satisfacen aproximadamente , pero a los fines prácticos pueden ser considerados como una muestra aleatoria

Los valores observados de muestra aleatoria (es decir de las variables aleatorias X_1, ..., X_n) se los identifica por x_1, ..., x_n
¡Son los DATOS!

Ya hemos visto en el capítulo de estadística descriptiva los siguientes estadísticos:

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ Media Muestral, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Total Muestral

Son variables aleatorias. Les podemos calcular su esperanza y su varianza.

Veamos cual es la esperanza y la varianza de la suma de variables aleatorias i.i.d. (la suma corresponde al total muestral si las v.a. son i.i.d)

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	**SIEMPRE!!!!**
$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$	**<u>SOLAMENTE</u> cuando las v.a. X1, ..., Xn son <u>independientes</u>**

Ahora podremos demostrar fácilmente:

Proposición

$X \sim Bi(n, p) \Rightarrow E(X) = n\,p$ y $Var(X) = n\,p\,(1 - p)$

Demostración:

X puede escribirse como una suma de v.a.i. $X_1, \ldots, X_n$

X = nº de éxitos en un experimento binomial

X_i = nº de éxitos en la i -esima prueba del experimento binomial - variable Bernouilli

$$X_i = \begin{cases} 0 \text{ si el resultado es F} \\ 1 \text{ si el resultado es E} \end{cases} \qquad p_{X_i}(1) = p \qquad p_{X_i}(0) = 1 - p$$

Para cada X_i tenemos que

<u>$E (X_i)$</u> = $0 \, p_{X_i}(0) + 1 \, p_{X_i}(1) = p$

$E (X_i^2) = 0^2 \, p_{X_i}(0) + 1^2 \, p_{X_i}(1) = p$

<u>$Var (X_i)$</u> = $E (X_i^2) - [E (X_i)]^2 = p - p^2 = p (1 - p)$

Para la suma de las X_i resulta

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\,p$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \underset{\text{indep.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\,p\,(1-p)$$

<u>como queríamos demostrar</u>

<u>Propiedades de la media muestral y la varianza muestral</u>

Si $X_1, ..., X_n$ es una m.a. de una población con media μ y varianza σ^2 entonces

i) $E(\overline{X}) = \mu$	$\overline{X}$ es un estimador insesgado de μ
ii) $Var(\overline{X}) = \sigma^2/n$	
iii) $E(S^2) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} \right) = \sigma^2$	S^2 es un estimador insesgado de σ^2