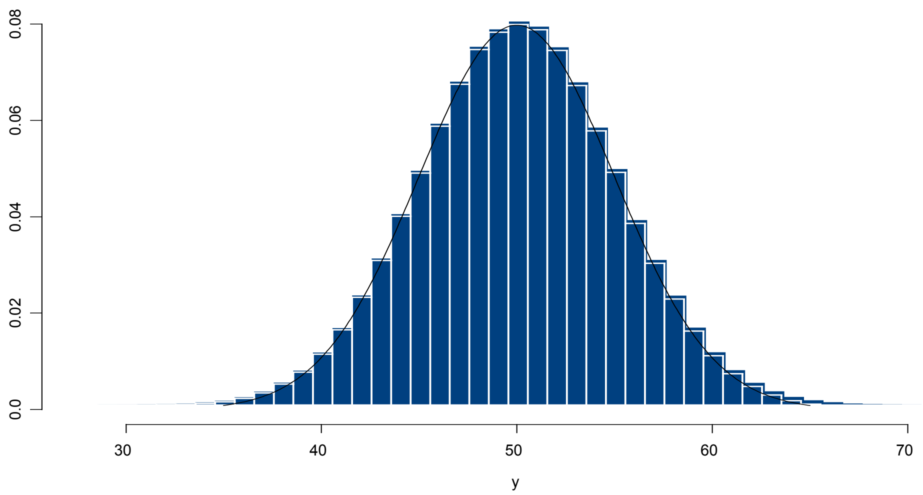
ESTADÍSTICA (Química)
PRÁCTICA 5 – Sumas de variables aleatorias

1. Se diseña un ascensor cuyo límite de carga es 2000 libras. Se indica que su capacidad máxima es de 10 personas. Si el peso de cada persona sigue una distribución normal con un peso medio de 185 libras y un desvío estándar de 22 libras, ¿cuál es la probabilidad de que un grupo de 10 personas exceda el límite de carga?

2. Suponga que una variable aleatoria es N(μ,σ²=0.25). Sea $\overline{X}_n$ el promedio de *n* observaciones independientes de dicha variable.
   a) Si *n* = 10, calcular $P(|\overline{X}_n - \mu| < 0.35)$. Observe que realizó este cálculo sin conocer el valor de la media μ.
   b) Acote, por Tchebycheff, la probabilidad de a).
   c) ¿Cuán grande debe ser *n* para que $P(|\overline{X}_n - \mu| < 0.35) \geq 0.99$? Realice el cálculo utilizando la distribución normal y también acotando con Tchebycheff. Compare.

3. Supongamos que el peso de un frasco de mermelada sigue una distribución normal con un peso medio de μ_A=1004g para la marca A y μ_B=1002g para la marca B, y con desvíos σ_A=8g y σ_B=6g, respectivamente. Se eligen al azar n_A=40 frascos de la marca A y n_B=35 frascos de la marca B, y se pesan sus contenidos.
   a) Defina las variables aleatorias involucradas en este problema. Indique la distribución exacta o aproximada de las medias muestrales asociadas a ambas marcas. Indique la distribución exacta o aproximada de la diferencia entre la media muestral para la marca A y la media muestral para la marca B. Enuncie los resultados teóricos en los que se basa.
   b) Calcule la probabilidad de que la diferencia entre las medias muestrales sea a lo sumo 3.
   c) Calcule la probabilidad de que la diferencia anterior sea por lo menos 6.
   d) Si no se conocieran los valores μ_A y μ_B y sólo se supiera que el valor observado de la diferencia entre la media muestral para la marca A y la media muestral para la marca B es 6, ¿sería razonable inferir que $\mu_A - \mu_B = 2$?
   Para contestar calcule, asumiendo que $\mu_A - \mu_B = 2$, la probabilidad de que la diferencia entre las medias muestrales sea 6 ó más. Si esta probabilidad fuera "muy pequeña" uno tendería a dudar de que la diferencia entre las medias poblacionales es 2.
   e) ¿Se modifican las distribuciones de a) si n_A=400 y n_B=350? Justifique.

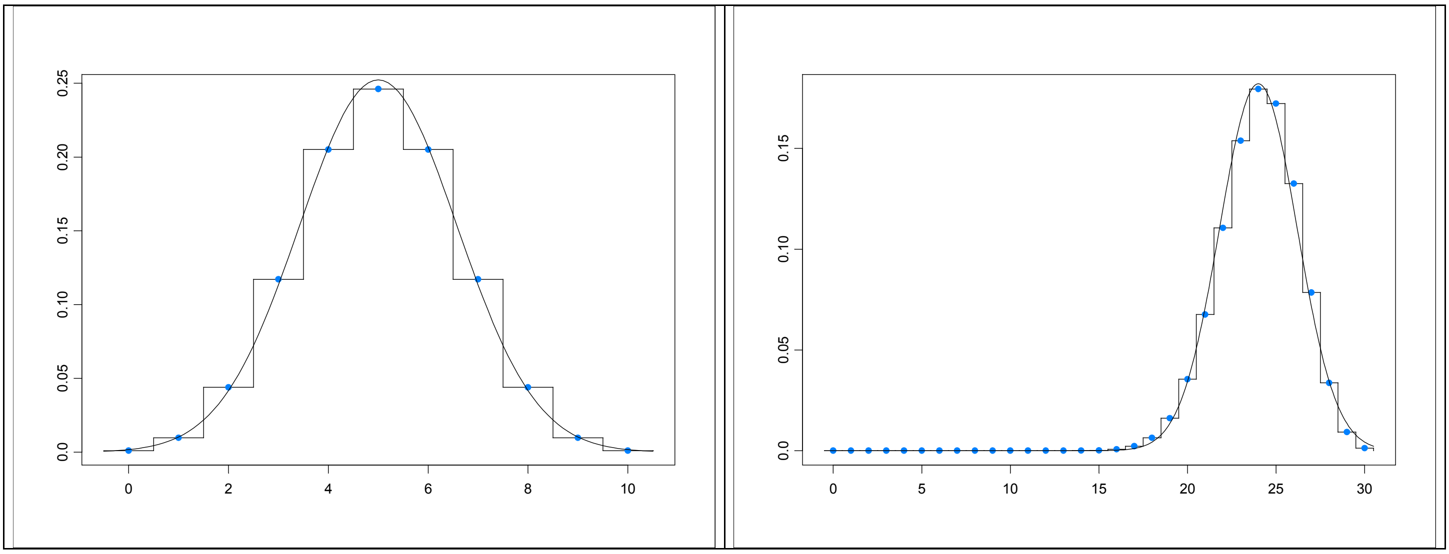
4. La figura muestra el histograma de probabilidad de una distribución Bi(100, 0.5) junto con una curva normal.
   a) ¿Cuáles son los valores de μ y σ^2 que corresponden a la curva normal dibujada?
   b) La probabilidad de obtener 52 caras en 100 tiradas de una moneda equilibrada, ¿es exactamente igual al área entre 51.5 y 52.5 bajo la curva normal o al área bajo el histograma deprobabilidad?

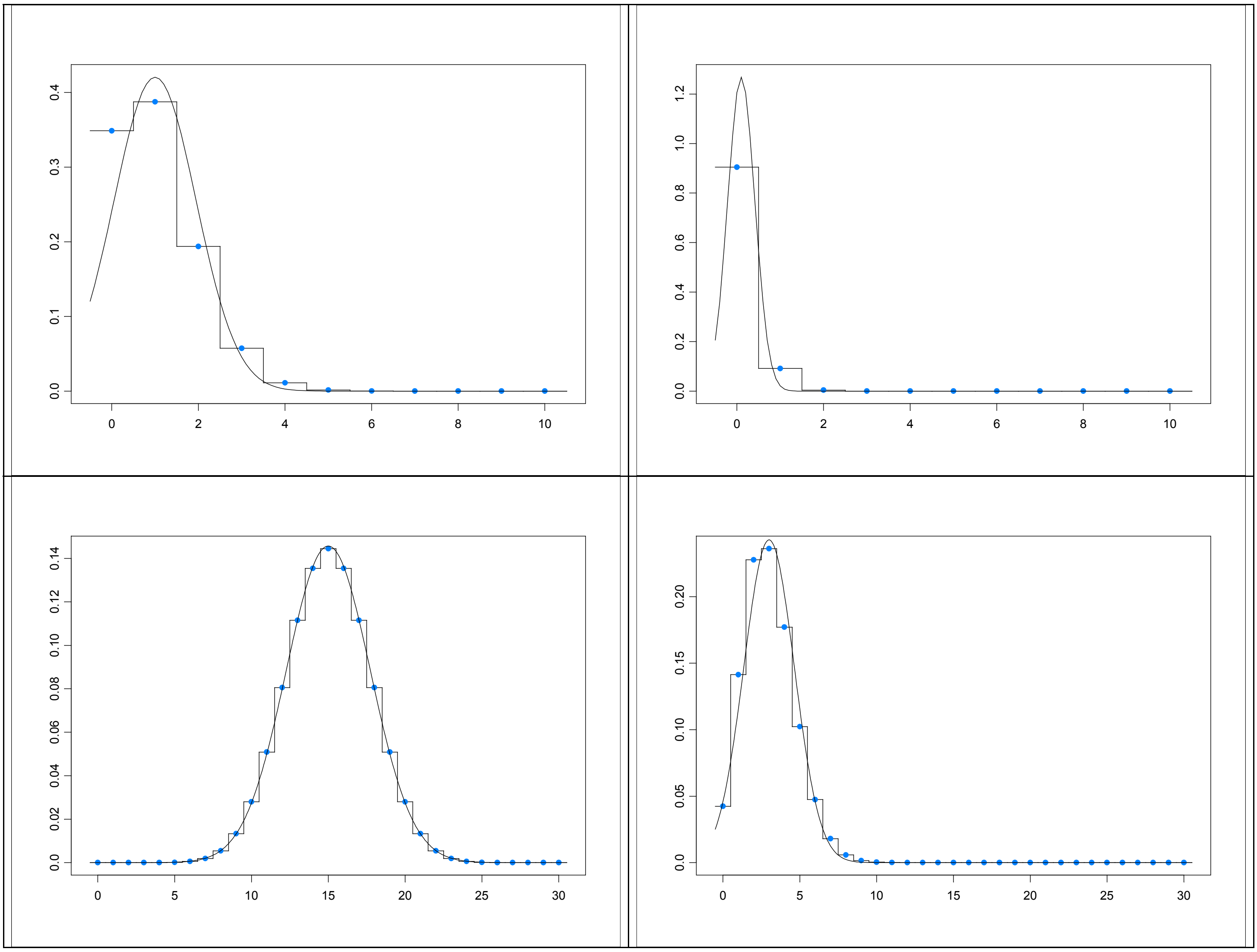


5. Se arroja una moneda 10000 veces. Estimar la probabilidad de obtener:
   a) entre 4900 y 5050 caras inclusive.
   b) 4900 caras ó menos.
   c) 5050 caras ó más.

6. Los siguientes seis gráficos muestran la función de probabilidad puntual de una variable Bi(n,p) y la correspondiente aproximación a través de la función de densidad de una variable Normal
   N(np, np(1-p)), para los siguientes valores de los parámetros *n* y *p*:

i) n = 10; p = 0.01	iv) n = 30; p = 0.1
ii) n = 10; p = 0.1	v) n = 30; p = 0.5
iii) n = 10; p = 0.5	vi) n = 30; p = 0.8





a) Indique a qué combinación de parámetros corresponde cada gráfico. ¿En qué casos la aproximación normal funciona mejor?

b) Para una variable X con distribución Bi(n,p) con n = 10; p = 0.01, calcule los valores de P(X = 1) y P(X = 0) de manera exacta y de manera aproximada (con corrección por continuidad) y compárelos.

7. Se tira 100 veces un dado de 6 caras. Use la aproximación normal para hallar:
   a) la probabilidad de que salga "6" entre 15 y 20 veces, inclusive.
   b) la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea menor que 300.

8. El teorema central del límite puede ser utilizado para analizar errores de redondeo. Suponga que el error de redondeo se representa mediante una variable aleatoria uniforme en [-0.5, 0.5]. Si se suman 100 números, halle la probabilidad de que el error de redondeo exceda en valor absoluto a:
   a) 1 b) 2 c) 5

9. En cierto juego la probabilidad de ganar es 0.3.
   Para participar en el mismo se paga $1 y en caso de ganar se reciben $3.
   a) ¿Cuál es *aproximadamente* la probabilidad de que en 50 juegos independientes un jugador gane por lo menos $10?

b) ¿Puede calcular la probabilidad pedida en a) *exactamente*?

10. Para rellenar una zona del río se utilizan 2 camiones (A y B). La distribución de la carga diaria (en toneladas métricas) transportada por el camión A tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{52} & \text{si } \; 11 < x < 15 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El camión B lleva una carga diaria en toneladas con esperanza 18Tm y desvío estándar 1.3Tm.

a) Calcule esperanza y varianza de la carga diaria transportada por A.
b) Calcule esperanza y desvío estándar de la carga total llevada por los dos camiones en un día.
c) Calcule *aproximadamente* la probabilidad de que la carga total transportada en 256 días esté entre 7950 y 8000Tm.
d) ¿Puede calcular la probabilidad pedida en c) *exactamente*?

11. De acuerdo a un estudio sobre factores de riesgo para patología cardiaca, el 40% de los varones adultos de más de 50 años son o han sido fumadores (los llamaremos “fumadores”).
Se selecciona una muestra al azar de 100 varones de más de 50 años. Suponiendo que los datos del estudio son correctos,

a) ¿cuál es la probabilidad de obtener 50 ó más fumadores?
b) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de fumadores en una muestra de 100 personas difiera de la proporción poblacional en menos de 0.05?
c) ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de b) sea por lo menos 0.9?