7. TESTS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN NORMAL CON VARIANZA DESCONOCIDA

Sea X1, ... , Xn una muestra aleatoria de una población Normal con media = μ y varianza = σ^2, N(μ,σ^2). Supongamos ahora que la varianza es desconocida y consideremos los mismos tres tipos de hipótesis alternativas sobre μ que vimos cuando la varianza era conocida.

Tipos de Hipótesis

a)	b)	c)
H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu \neq \mu_0$	H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu > \mu_0$	H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu < \mu_0$

Como la varianza es desconocida, la estimamos por S y resulta el siguiente:

Estadístico del test: $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}$. Bajo H_0: $\mu = \mu_0$, $T \sim t_{n-1}$

es el mismo cualquiera sea la hipótesis alternativa de interés y tiene distribución t con n-1 grados de libertad cuando $\mu = \mu_0$

Región de rechazo: La forma de la zona de rechazo depende del tipo de hipótesis alternativa y del nivel del test.

Tipo de Hipótesis alternativa	Región de Rechazo de nivel α
a) Ha: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert T \rvert > t_{n-1,\alpha/2}$
b) Ha: $\mu > \mu_0$	$T > t_{n-1,\alpha}$
c) Ha: $\mu < \mu_0$	$T < -t_{n-1,\alpha}$

Ejemplo: Se quiere decidir si un espectrofotómetro está calibrado. Para ello se obtienen 5 determinaciones de un gas estándar cuya concentración de CO es de 70 ppm obteniéndose los siguientes datos: 78, 83, 68, 72, 88. Supongamos que las observaciones se realizan de manera que pueden considerarse independientes e idénticamente distribuidas y que provienen de una distribución Normal. Esto es:
Modelo: (X1, X2, X3, X4, X5) v.a.i.i.d. N(μ,σ^2)
Pregunta: ¿Existe evidencia para pensar que el espectrofotómetro funciona mal y las mediciones tienen un error sistemático ó el hecho que 4 de los valores sean mayores que 70 pueden explicarse por variabilidad aleatoria?

A priori no podemos suponer en qué sentido será el sesgo.

Planteo 1. Consideramos un test bilateral

<u>Hipótesis</u>: H_0: $\mu = 70$ vs. Ha: $\mu \neq 70$

<u>Estadístico del test</u>: $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - 70}{S}$

como n = 5 y $\alpha = 0.05$ utilizando el valor crítico $t_{4,\,0.025} = 2.78$ resulta la siguiente

<u>Región de Rechazo</u> a nivel $\alpha = 0.05$: $|T| > 2.78$

<u>Valor observado del estadístico del test:</u>

$$Tobs = \sqrt{5}\,\frac{\overline{x} - 70}{S} = \sqrt{5}\,\frac{77.8 - 70}{8.1} = 2.1532$$

<u>Conclusión</u>

Como *Tobs* = 2.1532 < 2.78 <u>no</u> rechazo H0 a nivel 0.05

<u>P-valor</u>

Es la probabilidad de rechazar H0 cuando $\mu = \mu_0$ y utilizo el *Tobs* como valor crítico:

p-valor = P($|T| > 2.1532$) = 0.09763 (Utilizando el Statistix)
Utilizando las tablas de la t con 4 grados de libertad
= 2 P(T>2.1532) ≈ 2 P(T>2.132) = 2 (0.05) = 0.10

Si el técnico que utiliza el espectrofotómetro sabe que este tiende a dar únicamente valores mayores que el esperado utilizamos el
<u>Planteo 2</u>. Consideramos un test unilateral

<u>Hipótesis</u>: H_0: $\mu = 70$ vs. Ha: $\mu > 70$

<u>Estadístico del test</u>: $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - 70}{S}$

como n = 5 y $\alpha = 0.05$ utilizando el valor crítico $t_{4,\,0.05} = 2.13$ resulta la siguiente

<u>Región de Rechazo</u> a nivel $\alpha = 0.05$: T > 2.13

<u>Valor observado del estadístico del test:</u>

$$Tobs = \sqrt{5}\,\frac{\overline{x} - 70}{S} = \sqrt{5}\,\frac{77.8 - 70}{8.1} = 2.1532$$

<u>Conclusión</u>

Como *Tobs* = 2.1532 > 2.13 sí rechazo H0 a nivel 0.05

p-valor = P(T>2.1532)= 0.04882 (Utilizando el Statistix)
Utilizando las tablas de la t con 4 grados de libertad
= P(T>2.1532) ≈ P(T>2.132) = 0.05

¿Cómo se explica esta aparente contradicción?

Función de potencia y cálculo del tamaño de muestra para obtener una probabilidad de error tipo II dada: La función de potencia de este test es complicada porque la distribución del estadístico cuando $\mu \neq \mu_o$ es una distribución *t* no central. Aunque hay tablas y gráficos que permiten obtener probabilidades para una distribución de este tipo, no los estudiaremos en este curso. Por la misma razón, no calcularemos tamaño de muestra para obtener una probabilidad de error tipo II dada para una alternativa fija.

Respecto al p-valor, cuando se utilizan tablas sólo es posible obtener una cota, ya que las tablas proveen solamente algunos valores críticos de la distribución *t*.

8. TESTS PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN NORMAL CUANDO LA MEDIA ES DESCONOCIDA

Sea X1, ... , Xn una muestra aleatoria de una población Normal, $N(\mu,\sigma^2)$. Los tres tipos de hipótesis a testear son

a) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ vs H_a: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

b) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ vs H_a: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

c) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. H_a: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Estadístico del test: $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$. Bajo H_0:$\sigma^2 = \sigma_0^2$, *U* ~ χ^2_{n-1}

Región de rechazo: Como siempre la forma de la zona de rechazo depende del tipo de hipótesis alternativa. Para cada tipo, estará dada por

a) $U > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ó $U < \chi^2_{n-1,1\text{-}\alpha/2}$

b) $U > \chi^2_{n-1,\alpha}$

c) $U < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

respectivamente.

Función de potencia y cálculo del tamaño de muestra para obtener una probabilidad de error tipo II dada: Como en el caso del test *t*, la función de potencia de este test es complicada porque la distribución del estadístico cuando $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$ es una distribución no central. No la estudiaremos en este curso y, por la misma razón, no calcularemos tamaño de muestra para obtener una probabilidad de error tipo II dada, para una alternativa fija.

Respecto al p-valor, también como en el caso del test *t*, cuando se utilizan tablas sólo es posible obtener una cota, ya que las tablas proveen solamente algunos valores críticos de la distribución χ^2.

Ejemplo: Se toman 25 determinaciones de la temperatura en cierto sector de un reactor, obteniéndose $s = 2.8^\circ C$

Interesa saber, a nivel 0.05 si existe evidencia para decidir que la varianza de la temperatura en ese sector del reactor es mayor que $\left(2^\circ C\right)^2$.

Hipótesis a testear H_0: $\sigma^2 = 4$ vs H_a: $\sigma^2 > 4$

Estadístico del test $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$,

Región de rechazo $U = \dfrac{(n-1)S^2}{4} \geq \chi^2_{n-1,\,0.05}$

Tenemos que n = 25, luego de la tabla de una ji-cuadrado con 24 grados de libertad obtenemos $\chi^2_{24,\,0.05} = 36.42$. Como el valor observado de *U* es 47.04, se rechaza H_0. Es decir, hay evidencia a nivel 0.05 de que la varianza de la temperatura del reactor es mayor que $\left(2^\circ C\right)^2$.

9. TESTS DE HIPÓTESIS DE NIVEL APROXIMADO (O ASINTÓTICO) α PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN CUALQUIERA

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. El Teorema Central del Límite establece que para n suficientemente grande

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

Además, como S es un estimador consistente de σ, $\frac{\sigma}{S} \xrightarrow{p} 1$, luego

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \overset{(a)}{\sim} N(0,1) \\ \dfrac{\sigma}{S} \xrightarrow{p} 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

Observación: No se establece ninguna condición sobre la distribución de los datos solamente es necesario que el tamaño de la muestra sea grande. Los valores críticos de las regiones de rechazo se obtendrán de la distribución Normal estándar.

Nuevamente consideremos los siguientes

Tipos de hipótesis

a)	b)	c)
H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu \neq \mu_0$	H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu > \mu_0$	H_0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu < \mu_0$

<u>Estadístico del test</u>: $Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_o}{S}$. Bajo H_o: $\mu = \mu_o$, Z $\overset{(a)}{\sim}$ N(0,1)
es el mismo cualquiera sea la hipótesis alternativa de interés y tiene una distribución aproximadamente Normal cuando $\mu = \mu_o$

<u>Región de rechazo</u>: La forma de la zona de rechazo depende de la hipótesis alternativa.

Tipo de Hipótesis alternativa	Región de Rechazo de nivel aproximado α
a) Ha: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}$
b) Ha: $\mu > \mu_0$	$Z > z_{\alpha}$
c) Ha: $\mu < \mu_0$	$Z < -z_{\alpha}$

<u>Función de potencia aproximada</u>: Consideremos como ejemplo el tipo a), la función de potencia aproximada se obtiene en la forma siguiente:

$$\pi(\mu) = P_\mu\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right) = 1 - P_\mu\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right)$$

$$= 1 - P_\mu \left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu + \mu - \mu_o}{s/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \right)$$

$$= 1 - P_\mu \left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_o - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} + \frac{\mu_o - \mu}{s/\sqrt{n}} \right)$$

$$\cong 1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_o - \mu}{s/\sqrt{n}} \right) + \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_o - \mu}{s/\sqrt{n}} \right)$$

En forma similar, se obtiene la función de potencia aproximada en los otros dos tipos de hipótesis alternativas unilaterales (b) y c)).

En las secciones siguientes veremos que cuando la varianza y la media dependen del mismo parámetro, no es necesario reemplazar σ por un estimador. Se lo reemplaza por el valor que determina la hipótesis nula.

9.1. TEST DE HIPÓTESIS DE NIVEL APROXIMADO (O ASINTÓTICO) α PARA UNA PROPORCIÓN (PARÁMETRO p DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL)

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución Bi(1,p), luego $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ~ Bi(n,p). Aplicando el Teorema Central del Límite, si n es suficientemente grande,

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

donde $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ la proporción muestral o frecuencia relativa de éxitos.

Nuevamente consideramos los siguientes tres

Tipos de hipótesis

a)	b)	c)
H_0: $p = p_0$ vs. Ha: $p \neq p_0$	H_0: $p = p_0$ vs. Ha: $p > p_0$	H_0: $p = p_0$ vs. Ha: $p < p_0$

<u>Estadístico del test</u>: Z = $\dfrac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$. Bajo H$_0$: $p = p_0$, Z $\overset{(a)}{\sim}$ N(0,1)

<u>Región de rechazo</u>

Tipo de Hipótesis alternativa	Región de Rechazo de nivel aproximado α
a) Ha: $p \neq p_0$	$\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}$
b) Ha: $p > p_0$	$Z > z_{\alpha}$
c) Ha: $p < p_0$	$Z < -z_{\alpha}$

9.2 TEST DE HIPÓTESIS DE NIVEL APROXIMADO α PARA EL PARÁMETRO λ DE UNA DISTRIBUCIÓN POISSON

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución de Poisson de parámetro λ. Entonces, si *n* es suficientemente grande,

$$\frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

Nuevamente consideramos los siguientes tres

Tipos de hipótesis

a)	b)	c)
H$_0$: $\lambda = \lambda_0$ vs. Ha: $\lambda \neq \lambda_0$	H$_0$: $\lambda = \lambda_0$ vs. Ha: $\lambda > \lambda_0$	H$_0$: $l = l_0$ vs. Ha: $\lambda < \lambda_0$

<u>Estadístico del test</u>: Z = $\dfrac{\overline{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 / n}}$. Bajo H$_0$: $\lambda = \lambda_0$, Z $\overset{(a)}{\sim}$ N(0,1)

<u>Región de rechazo</u>

Hipótesis alternativa	Región de Rechazo de nivel aproximado α
a) Ha: $\lambda \neq \lambda_0$	$\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}$
b) Ha: $\lambda > \lambda_0$	$Z > z_{\alpha}$
c) Ha: $\lambda < \lambda_0$	$Z < -z_{\alpha}$