ESTADÍSTICA (Química)
PRÁCTICA 3 – Variables aleatorias discretas

1. Una urna contiene 2 bolitas con el "0", 3 bolitas con el "10" y 5 bolitas con el "20".
   a) Sea X := número de una bolita elegida al azar de esta urna.
      Halle la función de probabilidad puntual de esta variable y grafíquela.
   b) Se extraen 2 bolitas con reposición y se registran los valores observados.
      i) Construya un espacio muestral para este experimento aleatorio y asigne a cada punto del espacio muestral su probabilidad.
      ii) Sea Y = promedio de los valores obtenidos en una realización del experimento. Construya la distribución de probabilidades para Y.
      iii) Grafique la función de probabilidad puntual para Y (al graficar mantenga para ambos ejes de coordenadas la misma escala utilizada en a)).
   c) (opcional) Se extraen ahora 4 bolitas con reposición de la misma urna.
      Resuelva los incisos i), ii) y iii) del punto b).
   d) Compare los dos (tres) gráficos de las funciones de probabilidad puntual. Comente.

2. Sea X una variable aleatoria discreta con P(X=0) = 0.25, P(X=1) = 0.125, P(X=2) = 0.125 y P(X=3) = 0.5. Grafique la función de probabilidad puntual y la función de distribución acumulada de X.

3. La siguiente tabla muestra la función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta X:

X	<0	$0\leq x<1$	$1\leq x<2$	$2\leq x<3$	$3\leq x<4$	≥ 4
F(x)	0	0.1	0.2	0.7	0.8	1.0

   a) Calcule $P(2<X\leq 4)$.
   b) Calcule $P(2\leq X\leq 4)$.
   c) Calcule $P(X>3)$.
   d) Halle la función de probabilidad puntual de X.

4. Una compañía proveedora de productos químicos tiene en existencia 100Kg de un producto que vende a sus clientes en lotes de 5Kg. Sea X := número de lotes encargados por un cliente seleccionado al azar. Suponga que X tiene la siguiente función de probabilidad puntual:

x	1	2	3	4
p(x)	0.2	0.4	0.3	0.1

   a) Calcule E(X) y V(X).
   b) Calcule el número esperado de kilogramos sobrantes después de embarcar el pedido del siguiente cliente seleccionado al azar, y la varianza de los kilos sobrantes.

5. (Juego de ruleta) Una ruleta tiene 37 números, del 0 al 36. Cada número de la ruleta tiene asignado un color: hay 18 números de color negro, 18 rojos y uno verde, que es el cero. En cada juego de la ruleta se arroja una bolita en un disco que gira, de modo que cuando la ruleta deja de girar, la bolita cae en el casillero que le corresponde a cada número (del 0 al 36) con igual probabilidad. Una apuesta posible al jugar a este juego es apostar a lo que se llama

"color": se apuesta, por ejemplo $1 al color rojo (o bien al negro, pero al verde no se puede apostar). Si el número que sale es rojo, el apostador gana, y en otro caso pierde.

a) En un casino clásico, en caso de salir rojo el número apostado, el apostador recibe un premio de $2, (por lo tanto su ganancia neta en el caso de ganar es $1), y no recibe nada en el caso de perder (por lo tanto, en este caso, su ganancia neta es -$1). Hallar la esperanza de la ganancia neta del apostador al jugar "color rojo" en un casino clásico.
b) Un juego de apuestas se dice *equilibrado* si el valor de la ganancia neta es igual a 0, es decir, en promedio quien apuesta no gana ni pierde. ¿Es equilibrado el juego que proponen los casinos clásicos cuando apostamos a un color dado?
c) Un casino generoso decide ofrecer un poco más de $1 como premio si un jugador apuesta $1 a color (rojo, por ejemplo). ¿Cuánto debería pagar el casino para que el juego resulte equilibrado?

6. Un examen de multiple choice está compuesto de 15 preguntas, cada pregunta con 5 respuestas posibles de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes que realizan el examen contesta las preguntas al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste al menos 10 preguntas correctamente?
   b) ¿Cuál es el número de respuestas correctas esperado?

7. Sea X ~ *Bi* (20, 0.8). Calcule utilizando la tabla:
   a) $P(X \leq 7)$
   b) $P(X > 16)$
   c) $P(X \geq 16)$
   d) $P(12 \leq X \leq 17)$

8. Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 12 de granito. Un asistente de laboratorio selecciona 3 de los especímenes para analizarlos.
   a) ¿Cuál es la función de probabilidad puntual del número de especímenes de basalto seleccionados para ser analizados?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los especímenes seleccionados para el análisis sean del mismo tipo de roca (es decir, todos graníticos o todos basálticos)?

9. Suponga que la cantidad de pulsos que llegan a un contador en un intervalo fijo de tiempo sigue una distribución de Poisson a una tasa promedio de 6 por minuto.
   a) Halle la probabilidad de que en 30 segundos se reciba por lo menos un pulso.
   b) ¿Cuál es el número esperado de pulsos recibidos durante 2 minutos?

10. El número de imperfecciones que tiene una placa fotográfica sigue la distribución de Poisson de parámetro 0.1 imperfecciones por cm^2.
    a) Si de tal placa se toma una muestra de $40cm^2$, ¿cuál es la probabilidad de que esa muestra contenga exactamente 2 irregularidades?
    b) Si ahora se toman en forma independiente 5 muestras de $30cm^2$ de área cada una, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente una de ellas no contenga ninguna irregularidad?

11. El número de burbujas de aire en una placa de vidrio sigue un proceso de Poisson de parámetro 0.4 burbujas por cada m^2.
    a) Calcular la probabilidad de:
       i. que en una placa de $2.5m \times 2m$ no haya burbujas de aire.
       ii. que en una placa de $2.5m \times 2m$ haya más de 2 burbujas de aire.

b) El precio de venta de la placa de vidrio de 2.5m × 2m depende de la cantidad de burbujas de aire. Si la placa no tiene burbujas de aire, el precio de venta de la placa es de $50, si la placa tiene 1 ó 2 burbujas el precio de venta es de $40 y si tiene más de 2 burbujas el precio de venta es de $20. Al fabricante le cuesta $15 producir una placa de vidrio. Hallar la probabilidad puntual de la ganancia neta obtenida por el fabricante al vender una placa. ¿Cuál es la ganancia neta esperada por el productor al vender una placa?
c) Las placas se venden en lotes de 15.
   i. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya exactamente dos placas sin burbujas de aire?
   ii. Hallar el número esperado de placas sin burbujas de aire en un lote.
d) ¿Qué área debe tener una placa para que la probabilidad de encontrar al menos una burbuja de aire sea igual a 0.998?

12. De las personas que pasan por un detector de metales en un aeropuerto, 0.5% lo activa. Sea X: número entre un grupo de 500 personas seleccionadas al azar que activan el detector.
   a) ¿Cuál es la función de probabilidad puntual de X? ¿Cuál es la función de probabilidad puntual aproximada de X?
   b) Calcule $P(X = 5)$ usando la distribución exacta y la aproximada, y compárelas.
   c) Calcule $P(X \geq 5)$ usando la distribución aproximada.

13. Un comprador de tornillos está dispuesto a comprar un lote grande. Para verificar la calidad de lo que compra, elige 10 tornillos al azar de ese lote y verifica si son defectuosos o no lo son. Decide comprar todo el lote si a lo sumo uno de los tornillos revisados es defectuoso.
   a) Describa las variables aleatorias y, de ser posible, indique la distribución de esas variables y los parámetros desconocidos para este problema.
   b) Sea A = {el comprador decide comprar el lote} ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$ cuando la verdadera proporción p de defectuosos en el lote es 0.01? ¿0.05? ¿0.10? ¿0.20? ¿0.30?
   c) El gráfico de $P(A)$ (en el eje vertical) como función de p (en el eje horizontal) se llama *curva característica* del plan de aceptación del lote.
   Utilice los resultados del inciso b) y esboce esa curva para $0 \leq p \leq 1$.
   d) Repita b) y c) reemplazando "10 tornillos" por "15 tornillos".
   e) ¿Cuántos tornillos deberá observar el comprador para que la probabilidad de aceptar un lote cuando $p = 0.10$, sea ≤ 0.05?. Se usa el mismo criterio de aceptación del lote.

14. Los hoteles aceptan reservaciones en número mayor a su capacidad para minimizar pérdidas debido a las personas que no se presentan. Los registros de un hotel muestran que en promedio el 20% de los huéspedes no se presentan. Un hotel tiene 22 habitaciones y ha aceptado 25 reservaciones para un día.
   a) ¿Cuál es el número esperado de huéspedes que se presentan a reclamar su habitación para ese día?
   b) ¿Cuál es la varianza del número de huéspedes que se presentan a reclamar su habitación para ese día?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los huéspedes con reserva previa que se presenten en dicho día, obtengan la habitación?
   d) El gerente pretende que la probabilidad de que al menos un huésped que reservó no obtenga la habitación sea menor que 0.05 (es decir, que la probabilidad de que le caiga al menos un reclamo por parte de los huéspedes que reservaron su habitación sea pequeña, o sea menor a 0.05). ¿Cuál es el número máximo de reservaciones que debería aceptar?

15. La oficina de mantenimiento de una facultad informa que la posibilidad de quedarse encerrado en un ascensor es de 1 en 100. Un profesor visitante trabaja cinco días a la semana durante cuatro semanas y sube una vez por día.
    a) Calcule la probabilidad de que nunca se quede encerrado.
    b) Calcule la probabilidad de que se quede encerrado por lo menos una vez.
    c) Calcule la probabilidad de se quede encerrado más de dos veces.
    d) ¿Cuál es el número esperado de veces que quedará encerrado?
    e) ¿Cuál es el número de veces que quedará encerrado más probable? O sea que si X = "número de veces que queda encerrado", hallar el k para el cual $P(X = k)$ sea máxima.
    f) Para realizar los cálculos de los incisos anteriores debió suponer que el funcionamiento del ascensor en un día es independiente del funcionamiento en otro día. ¿Le parece razonable este supuesto? ¿Qué otros supuestos son necesarios? ¿Considera que se cumplen en este caso? Justifique.