

Repaso Variables Aleatorias

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Repaso Variables Aleatorias

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1. Variables aleatoria:

Repaso Variables Aleatorias

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1. Variables aleatoria: $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$

Repaso Variables Aleatorias

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1. Variables aleatoria: $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$
2. Función de distribución acumulada:
$$F(t) = P(X \leq t) = F_X(t)$$

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. F_X es una función creciente: si $s \leq t$, entonces $F_X(s) \leq F_X(t)$.

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. F_X es una función creciente: si $s \leq t$, entonces $F_X(s) \leq F_X(t)$.
- 3.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 .$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. F_X es una función creciente: si $s \leq t$, entonces $F_X(s) \leq F_X(t)$.
- 3.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 .$$

4. F_X es continua a derecha con limite a izquierda:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} F_X(t) = F_X(a)$$

$$F_X(a^-) := \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t) = P(X < t) .$$

Propiedades:

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. F_X es una función creciente: si $s \leq t$, entonces $F_X(s) \leq F_X(t)$.

3.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 .$$

4. F_X es continua a derecha con limite a izquierda:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} F_X(t) = F_X(a)$$

$$F_X(a^-) := \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t) = P(X < t) .$$

5. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) = F_X(a) - F_X(a) = 0 .$

Variables Aleatorias Discretas

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Definition

X es discreta si existe $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{i \geq 1} P(X = x_i) = 1 .$$

$$p_X(a) = P(X = a)$$

$$p_X(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_X(x) = 0 \quad \text{para los demás valores de } x.$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$$p_X(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_X(x) = 0 \quad \text{para los demás valores de } x.$$

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) .$$

$$p_X(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_X(x) = 0 \quad \text{para los demás valores de } x.$$

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) .$$

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i)$$

$$p_X(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_X(x) = 0 \quad \text{para los demás valores de } x.$$

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) .$$

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i)$$

$$F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$$

Esperanza-Definición

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

X v.a.con $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ y probabilidad puntual $p_X(x_i)$, definimos la esperanza de X mediante la fórmula,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i) ,$$

siempre que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$.

Propiedades:

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1. $P(X = c) = 1$ entonces $E[X] = c$.
2. $P(X \geq 0) = 1$, entonces $E[X] \geq 0$.
3. $P(X \geq 0) = 1$ y $E[X] = 0$, entonces $P(X = 0) = 1$.

Esperanza de una función de una variable aleatoria

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea X una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
Consideremos la nueva variable aleatoria $Y = g(X)$.

Entonces

$$E[Y] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_X(x_i) .$$

Esperanza de una función de una variable aleatoria

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea X una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
Consideremos la nueva variable aleatoria $Y = g(X)$.

Entonces

$$E[Y] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_X(x_i) .$$

Corolario:

$$E[\alpha g_1(X) + \beta g_2(X) + \gamma] = \alpha E[g_1(X)] + \beta E[g_2(X)] + \gamma .$$

Varianza

X v.a. con esperanza μ_X , definimos su varianza de X mediante la formula

$$V(X) = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right].$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Varianza

X v.a. con esperanza μ_X , definimos su varianza de X mediante la formula

$$V(X) = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right].$$

Fórmula Alternativa:

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Varianza

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

X v.a. con esperanza μ_X , definimos su varianza de X mediante la formula

$$V(X) = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right].$$

Fórmula Alternativa: Sea X una variable aleatoria, entonces vale que

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(\mu_X\right)^2.$$

Bernoulli

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Dos posibles resultados: éxito y fracaso. $X = 1$ si observamos éxito y $X = 0$ caso contrario. La función de probabilidad puntual esta dada por

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$p(1) = P(X = 1) = p ,$$

siendo p , $0 \leq p \leq 1$, representa la probabilidad de observar un éxito.

$$E[X] = p , V(X) = p(1 - p)$$

Binomial

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

n repeticiones independientes de experimento Bernoulli con probabilidad de éxito p .

X número de éxitos en n repeticiones.

$RgX = \{0, 1, \dots, n\}$.

Función de probabilidad puntual esta caracterizada por los parámetros (n, p) y viene dada por

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ para } 0 \leq k \leq n \quad (1)$$

notación: $X \sim B(n, p)$

$$E[X] = np, \quad , \quad V(X) = np(1-p) .$$

Ejemplo

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Los siguientes ejemplos corresponden a variables aleatorias con distribución Binomial:

El 80% de los alumnos de la universidad son admitidos para continuar sus estudios en universidades Americanas. Si tres alumnos aplican el proximo año, cual es la probabilidad de que dos de ellos sean admitidos?

Si 7% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos, cuál es la probabilidad de que al examinar 4 piezas en sólo una de ellas esté fallada?

En cierta zona industrial, 7 de las 12 industrias existentes están en regla. 3 inspectores deciden visitar cada uno de ellos una de las empresas, en forma independiente. (están peleados y no se hablan entre si). Cada uno de ellos pasa su informe y considere X la cantidad de informes correspondientes a empresas en regla. Obtenga la función de probabilidad puntual de X .

y esta?

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Considere una urna con 5 bolillas blancas y 7 bolillas rojas. Se extraen 3 bolillas CON REPOSICION. Sea X el número de bolillas rojas extraídas. Hallar la función de probabilidad puntual de X .

X cuenta el número de repeticiones hasta obtener el primer éxito en ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito p
Función de probabilidad puntual:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p .$$

Notación:

$$X \sim \mathcal{G}(p) .$$

$$E[X] = \frac{1}{p} , \quad V(X) = \frac{1 - p}{p^2} .$$

Binomial Negativa

X = número de repeticiones hasta observar los r éxitos en ensayos Bernoulli

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(Discretas)
Continuas

Continuas Famosas

Binomial Negativa

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(Discretas)
Continuas

Continuas Famosas

X = número de repeticiones hasta observar los r exitos en ensayos Bernoulli

$$R_X = \{r, r + 1, r + 2, \dots\}.$$

Binomial Negativa

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(Discretas)
Continuas

Continuas Famosas

X = número de repeticiones hasta observar los r éxitos en ensayos Bernoulli

$$R_X = \{r, r+1, r+2, \dots\}.$$

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \text{ para } k \geq r.$$

Notación:

$$X \sim BN(r, p).$$

Binomial Negativa

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(Discretas)
Continuas

Continuas Famosas

X = número de repeticiones hasta observar los r éxitos en ensayos Bernoulli

$$R_X = \{r, r+1, r+2, \dots\}.$$

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \text{ para } k \geq r.$$

Notación:

$$X \sim BN(r, p).$$

$$E[X] = \frac{r}{p}, \quad V(X) = r \frac{1-p}{p^2}.$$

Ejemplo 1

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

La probabilidad de que un alumno de la universidad pase el examen Toeffl es 0,8. Cual es la probabilidad de que recién consiga aprobar el examen en el sexto intento? Sea X el número de veces que rinde el examen hasta aprobar. Hallar $Rg(X)$ y su función de probabilidad puntual. Si cada vez que rinde el examen debe pagar 90 dólares, cual es el valor esperado que debe pagar hasta aprobar el examen?

Ejemplo 2

El 70% de los artículos enviados a publicar por investigadores asistente son aceptados. Si para pasar a la categoría adjunto un investigador necesita tener publicados 7 trabajos, cual es la probabilidad de que sea promovido recién con su 15° trabajo? Por cada articulo enviado, debe pagar 25 pesos de correo. La editora le reembolsa el valor caso acepte el articulo para se publicado. Cual es el gasto medio del investigador en correo para pasar de categoría?

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Poisson

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,
entonces

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} .$$

$$E[X] = \lambda \quad V(X) = \lambda .$$

Aproximación

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$Y_n \sim B(n, p_n)$, entonces

$$P(Y_n = k) \rightarrow P(X = k) ,$$

cuando $n \uparrow \infty$, y $np_n \rightarrow \lambda$, para $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proceso de Poisson

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

N_t = en número de llamadas que recibe una central telefónica en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Para cada t tenemos una variable aleatoria diferente.

$N_{t+s} - N_t$ = número de llamadas recibidas en el intervalo $(t, t + s]$.

Que podemos decir de la distribución de la variable aleatoria N_t , para $t \geq 0$?

Hipótesis de Procesos de Poisson

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$(N_t)_{t \geq 0}$ variables aleatorias discretas tomando valores en $\mathbb{N}_0$
(no necesariamente número de llamadas telefónicas)

- 1- $N_0 = 0$. No hay llamadas acumuladas.
- 2- Homogeneidad: La distribución del número de llamados en cierto intervalo de tiempo solo depende de la longitud del mismo:

$$P(N_{t+s} - N_t = k) = P(N_s = k) \text{ para todo } s, t \geq 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

- 3- Las llamadas correspondientes a intervalos de tiempo disjuntos son *variables aleatorias independientes*, es decir si $t_1 < t_2 < \dots < t_j$, tenemos que la

$$\begin{aligned} P(N_{t_1} = k_1 \cap N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 \cap \dots \cap N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j) &= \\ &= P(N_{t_1} = k_1)P(N_{t_2} - N_{t_1} = k_2) \dots P(N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j) \end{aligned}$$

para todo $k_i \in \mathbb{N}_0$.

- 4- Existe $\lambda > 0$ tal que $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$ y $P(N_h \geq 2) = o(h)$, cuando h tiende a cero, siendo que $o(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Para cualquier proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ satisfaciendo 1 – 4, vale que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$:

$$P(N_t = k) = \frac{\exp^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} .$$

Variables Aleatorias (absolutamente) Continuas: Definición

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Una variable aleatoria X se dice (absolutamente) continua si existe

$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du .$$

En tal caso, diremos que f_X es la función de densidad de la variable aleatoria X .

Si X tiene función de densidad f_X , tenemos que

$$f_X(u) \geq 0$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) du .$$

Toda función $f \geq 0$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1$ se dice función de densidad. Además, dada una función de densidad f podemos siempre encontrar una variable aleatoria absolutamente continua que tenga a f por densidad.

X es absolutamente continua, entonces X es continua.

$P(X = x) = 0$ para todo x

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Si f_X es continua en x_0 entonces, F_X es derivable en x_0 y además

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0) .$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Si f_X es continua en x_0 entonces, F_X es derivable en x_0 y además

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0) .$$

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) .$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Si f_X es continua en x_0 entonces, F_X es derivable en x_0 y además

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0) .$$

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) .$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u) du .$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Si f_X es continua en x_0 entonces, F_X es derivable en x_0 y además

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0) .$$

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) .$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u) du .$$

Como las probabilidades puntuales valen cero, la fórmula precedente vale para todo tipo de intervalo con extremos en a y b : $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) .

$$f_X \Leftrightarrow F_X$$

Si tenemos la densidad, integrándola obtenemos la función de distribución.

Derivando la función de distribución, recuperamos la densidad.

Algunos Ejemplos

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

1) Sea

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \alpha x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

Hallar α para que f sea una función de densidad. Hallar la función de distribución asociada a la densidad f .

Hallar x tal que $P(X \leq x) = 0.5$

Esperanza de Variables Aleatorias Continuas

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

X con densidad f_X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx .$$

Esperanza de una función de una variable aleatoria continua

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea X una variable aleatoria continua con densidad f_X y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Consideremos la nueva variable aleatoria $Y = g(X)$. Entonces

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx .$$

$$E[\alpha g_1(X) + \beta g_2(X) + \gamma] = \alpha E[g_1(X)] + \beta E[g_2(X)] + \gamma .$$

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

Varianza

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Dada una variable aleatoria X con esperanza μ_X , definimos su varianza de X mediante la formula

$$V(X) = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right]. \quad (2)$$

Fórmula reducida:

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(\mu_X\right)^2.$$

Desvío estandar

$$DS(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Dados α y β números reales, tenemos que

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X) ,$$

$$DS(\alpha X + \beta) = |\alpha| SD(X) .$$

Uniforme

X tiene distribución uniforme en el intervalo (α, β) para $\alpha < \beta$ si su función de densidad esta dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{caso contrario .} \end{cases} \quad (3)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x \geq \beta , \end{cases}$$

Notación:

$$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta) .$$

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} .$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

La distribución normal

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Diremos que la variable aleatoria Z tiene distribución normal estandar si su función de densidad es de la forma

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Notación: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-z^2/2} dz = 1$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp^{-u^2/2} du .$$

Ejercicio

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Consideremos $X = \sigma Z + \mu$. Cuál es la función de densidad de la variable aleatoria X ?

Diremos que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \exp^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Diremos que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \exp^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Notación: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Diremos que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \exp^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Notación: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$E[X] = \mu \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

- normal estandar = $\mathcal{N}(0, 1)$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

- normal estandar = $\mathcal{N}(0, 1)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y = \alpha X + \beta$, entonces
 $Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

- normal estandar = $\mathcal{N}(0, 1)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y = \alpha X + \beta$, entonces
 $Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (estandarizar).

- normal estandar = $\mathcal{N}(0, 1)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y = \alpha X + \beta$, entonces
 $Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (estandarizar).
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $F_X(x) = \Phi\left((x - \mu)/\sigma\right)$.

Distribución exponencial

Diremos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario .} \end{cases}$$

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Distribución exponencial

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Diremos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario .} \end{cases}$$

En tal caso, $F_X(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

Distribución exponencial

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Diremos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario .} \end{cases}$$

En tal caso, $F_X(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

Notación: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Distribución exponencial

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Diremos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En tal caso, $F_X(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

Notación: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exponencial vs. Poisson

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$\mathcal{E}(\lambda)$ modela el tiempo transcurrido hasta la primer
ocurrencia de un proceso Poisson $PP(\lambda)$

Exponencial vs. Poisson

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

$\mathcal{E}(\lambda)$ modela el tiempo transcurrido hasta la primer ocurrencia de un proceso Poisson $PP(\lambda)$. Mas generalmente, en un $PP(\lambda)$ los tiempos transcurridos entre dos eventos sucesivos son $\mathcal{E}(\lambda)$.

Las variable aleatorias exponenciales suelen utilizarse para modelar tiempo de vida de artefactos con falta de memoria, debido a la siguiente propiedad que, salvo casos triviales, sólo la distribución exponencial verifica.

Falta de memoria

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Entonces,

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) .$$

Falta de memoria

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Entonces,

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) .$$

Mas aún, si X es una variable aleatoria no negativa satisfaciendo esta propiedad, entonces X es idénticamente nula ($P(X = 0) = 1$) ó $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, para algún $\lambda > 0$.

Ejercicio 1

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea X una variable aleatoria con distribución normal $X \sim \mathcal{N}(5, 0.25)$. Hallar

1. $P(4.75 \leq X \leq 5.50)$
2. $P(|X| > 5.25)$
3. c tal que $P(|X - 5| \leq c) = 0.90$
4. el 90-percentil de X .

Ejercicio 2

Variables Discretas
Famosas

Variables
Aleatorias
(absolutamente)
Continuas

Continuas Famosas

Sea $X_n \sim \mathcal{N}(5, 0.25/n)$.

1. Calcule $P(|X_n - 5| \leq 1/10)$.
2. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 5| \leq 1/10)$.
3. Encuentre $n_1 : \forall n \geq n_1, P(|X_n - 5| \leq 1/10) \leq 1/100$.