Estadística (Q). Variables aleatorias continuas. Clase del 6 de octubre de 2009

Ejercicio 1. En un juego de tiro al blanco, la distancia al centro (en cm.) que obtiene Juan se considera una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{72} & \text{si } 0 \le t \le 12 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Hallar la probabilidad de que un tiro de Juan diste menos de 1cm. del blanco.

(b) Hallar F_X.

(c) Hallar $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Hallar el percentil o cuantil 0.90 de la distribución de X.

(e) En un pub se organiza un juego que otorga un premio de $120 - 10X$ \$ para cada lanzamiento al blanco, donde X es la distancia conseguida. Si cada vez que se desea participar de este juego se debe pagar \$45, ¿cuál es la esperanza y la varianza de la ganancia neta para Juan?

(f) ¿Cuál es la probabilidad de que la ganancia neta sea mayor que la ganancia neta esperada?

(g) Juan tira 12 veces al blanco, ¿cuál es la probabilidad de dos o menos de sus tiros disten menos de 1cm. del blanco?

Ejercicio 2. La medida en centímetros de la longitud de la cintura de los hombres en Buenos Aires sigue una distribución normal con media 75 y varianza 25. Se sabe que todos los hombres de menos de 70 cm. de cintura usan cinturón de talle 1, mientras que los de cintura entre 70 y 81 cm. usan talle 2 y los restantes talle 3.

(a) ¿Qué proporción de hombres usa cintos de talle 2?

(b) Cuál debería ser la longitud máxima de cintura del talle 1 si se quiere que el 30% de los hombres use talle!?

(c) En una tienda un cliente acaba de comprar un cinturón de talle 2 para uso personal. Sabiendo esto, ¿cuál es la probabilidad de que su cintura mida más que 75 cm.?

(d) Si en la tienda entran azarosamente hombres a comprar de a un cinturón, ¿cuál es la probabilidad de que los primeros tres cinturones que se vendan sean del mismo talle?

Ejercicio 3. Una barra de 12 pulgadas sujeta por ambos extremos, debe someterse a una creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea $Y =$ distancia desde el extremo izquierdo donde ocurre la rotura. Supongamos que la densidad de Y es la siguiente

$$f_Y(y) = \begin{cases} a\,y(1 - \frac{y}{12}) & \text{si } 0 \le y < 12 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Hallar a.

(b) Calcular $P(Y \le 4), P(6 < Y), P(4 \le Y \le 6)$.

(c) Hallar la esperanza y la varianza de Y.

(d) Calcular la probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura.

(e) Hallar la longitud esperada del punto más corto cuando ocurra la ruptura.

Ejercicio 4. Si Y es una variable aleatoria normal con media 80 y desviación estándar 10, calcular las siguientes probabilidades

(a) $P(Y \le 100)$, $P(80 < Y)$, $P(65 \le Y \le 100)$.

(b) Hallar b para que se cumpla en cada caso:

i. $P(Y \le b) = 0.9838$.

ii. $P(b < Y) = 0.121$.

iii. $P(-b \le Y \le b) = 0.668$.

iv. $P(b \le |Y|) = 0.016$.

Ejercicio 5. La dureza de un metal se determina al golpear con una herrramienta la superficie del metal y despues medir la profundidad de penetración de la herramienta. Supongamos que la dureza de cierta aleación está distribuida normalmente con media 70 y desvío 3.

(a) Un espécimen es aceptable solo si su dureza esta entre 67 y 75. Hallar la probabilidad de que un especimen tomado al azar tenga una dureza aceptable.

(b) Se seleccionan diez especímenes al azar y en forma independiente, encontrar la probabilidad de que a lo sumo ocho entre esos diez especímenes sean aceptables. Encontrar también el número esperado de especímenes aceptables entre los diez elegidos.

Ejercicio 6. La biblioteca de una facultad dispone de una red de computadoras al alcance de los estudiantes. El porcentaje de tiempo medido en minutos que un usuario destina a la búsqueda bibliográfica semanalmente es una variable aleatoria T exponencial, además se sabe que el 49.9% de los estudiantes destina más de 20 minutos en busqueda bibliográfica.

(a) Hallar la esperanza de la variable T.

(b) Supóngase que de acuerdo con el porcentaje de tiempo destinado a la búsqueda bibliográfica el usuario es clasificado en una de cuatro categorías: 1 si T $<$ 25% , 2 si $25\% \leq T \leq 50\%$, 3 si $50\% < T \leq 75\%$ y 4 si $T > 75\%$. Hallar la esperanza de la variable aleatoria Y = categoría asignada a un usuario.

Ejercicio 7. Tarea -difícil- El diámetro D (expresado en dm) del tronco de cierta especie de árboles es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_D(x) = kxI_{(0,10)}(x)$$

(a) Hallar el valor de la constante k.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

(c) Idem b) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

(d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan el diámetro entre 4 y 6 dm.

(e) ¿Cuántos árboles habrá que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm, sea mayor o igual que 0.99?