Luego

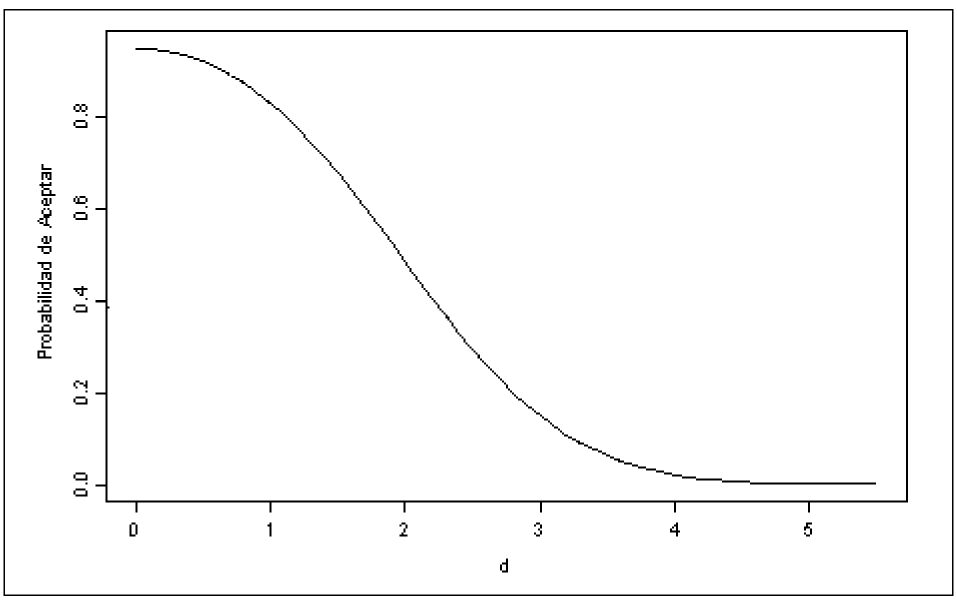
$$\beta(\mu) = P_\mu\left\{-z_{\alpha/2} \le Z + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\} = P_\mu\left\{-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right) \qquad (6)$$

donde ϕ es la función de distribución acumulada de la Normal.

La función $\beta(\mu)$ es llamada curva Característica de Operación (*Operating Characteristic-OC- curve*).

Curva OC para α =0.05, d = ($\sqrt{}$n/σ)|μ-μ_0|



Para un nivel de significación fijo α, la curva OC dada por la ecuación (6) es simétrica alrededor de μ_0 y depende de μ solamente a través de d = ($\sqrt{}$n/σ)|μ-μ_0|.

Ejemplo. Continuación. Para el test propuesto, obtengamos la probabilidad de aceptar la hipótesis nula de que μ = 38.9 (esto es que medimos sin sesgo) cuando en realidad estamos cometiendo un error sistemático de -0.5 = μ-μ_0

Luego d = ($\sqrt{3}$/1)|-0.5| = 0.5$\sqrt{3}$ = 0.866. Luego, como $z_{0.025}$ = 1.96,
β(10) = ϕ(0.866 + 1.96) - ϕ(0.866 - 1.96)
= ϕ(2.826) -ϕ(-1.094) = 0.99764 - 0.13698 = 0.86066

OBSERVACIÓN

La función $\pi(\mu)$ = 1-$\beta(\mu)$ es llamada *función de potencia* del test. Para cada valor de μ, la **potencia** del test es **la probabilidad de rechazo** cuando el verdadero valor es μ.

5. 6 DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE MUESTRA

La función Característica de Operación (y equivalentemente la función de potencia) es útil para determinar cuan grande debe ser el tamaño de la muestra de manera que se cumplan ciertas especificaciones sobre la probabilidad de un error de tipo II.

De acuerdo con la curva Característica de Operación (ver figura), como d = $(\sqrt{n}/\sigma)|\mu-\mu_0|$, para una diferencia $\mu-\mu_0$ fija a medida que aumenta n también aumenta d y por lo tanto decrece la probabilidad de aceptar H0.

Valores de d y β de la función Característica de Operación con α = 0.05

d	β	d	β	d	β
2.499	0.295	2.899	0.174	3.299	0.090
2.549	0.278	2.949	0.161	3.349	0.082
2.599	0.261	2.999	0.149	3.399	0.075
2.649	0.245	3.049	0.138	3.449	0.068
2.699	0.230	3.099	0.127	3.499	0.062
2.749	0.215	3.149	0.117	3.549	0.056
2.799	0.201	3.199	0.108	3.599	0.051
2.849	0.187	3.249	0.099	3.649	0.046

Si nos interesa un β aproximadamente igual a 0.25 resulta d = $(\sqrt{n}/\sigma)|\mu-\mu_0|$= 2.649

$n \cong (2.649 \; \sigma / |\mu-\mu_0|)^2$

Ejemplo. Continuación.

¿Cuántas determinaciones deben realizarse para que la probabilidad de no rechazar H0: μ=38.9 sea $\beta \cong 0.25$ cuando en realidad las observaciones tienen un sesgo de -0.5 ? y para $\beta \cong 0.15$?

Para $\beta \cong 0.25$ resulta $n \cong (2.649 \; 1 / |0.5|)^2=(2*2.649)^2 = 28.69$

Para $\beta \cong 0.15$ resulta $n \cong (2*2.999)^2 = 35.97$

Si se realizan 36 determinaciones el porcentaje de veces que se cometerá el error de no rechazar H0 cuando se están realizando determinaciones sesgadas es del 15%.

DESARROLLO ANALÍTICO

Por ejemplo, supongamos que nos interesa determinar un tamaño de muestra de manera que la probabilidad de aceptar H0 $\mu = \mu_0$ cuando la verdadera media es μ_1 sea aproximadamente β. Queremos hallar n de manera que $\beta(\mu_1) \cong \beta$. De la ecuación (6) resulta

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right) \tag{7}$$

La ecuación anterior no tiene una solución analítica inmediata, sin embargo podemos hallar una solución aproximada.

Si $\mu_1 > \mu_0$, como ϕ es una función creciente

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right) \le \Phi\left(-z_{\alpha/2}\right) = \alpha / 2$$

Por lo tanto podemos despreciar el segundo sumando de (7)

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)$$

$$\Phi(-z_\beta) \approx \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)$$

Luego

$$-z_\beta \approx \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + z_{\alpha/2}$$

ó

$$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

Ejemplo. Continuación. Recordemos que interesaba calcular cuántas determinaciones es necesario realizar para que la probabilidad de no rechazar H0: μ=38.9 sea $\beta \cong 0.25$ cuando en realidad las observaciones tienen un sesgo de -0.5 y también para $\beta \cong 0.15$?

Como $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.25} = 0.67$, $z_{0.15} = 1.04$, $\mu - \mu_0 = 0.5$, $\sigma = 1$

- para $\beta \cong 0.25$ resulta $n \cong (1.96+0.67)^2\, 4 = 27.68$,
- para $\beta \cong 0.15$ resulta $n \cong (1.96+1.04)^2\, 4 = 36$.

Los resultados son similares a los obtenidos directamente de la curva O C.

En el caso de tests unilaterales teníamos

Hipótesis a testear	Hipótesis a testear
b) H0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu > \mu_0$	c) H0: $\mu = \mu_0$ vs. Ha: $\mu < \mu_0$
Región de rechazo: $Z > z_\alpha$	Región de rechazo: $Z < -z_\alpha$

por lo tanto a probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir no rechazar H0 cuando en realidad (la alternativa) Ha es verdadera en el valor μ es:

$\beta(\mu)$ = P_μ (no rechazar H0)

Ha: $\mu > \mu_0$	Ha: $\mu < \mu_0$
$\beta(\mu) = P_\mu\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha\right\}$	$\beta(\mu) = P_\mu\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha\right\}$
$= P_\mu\left\{Z + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha\right\}$	$= P_\mu\left\{Z + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha\right\}$
$= P_\mu\left\{Z \le \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right\}$	$= P_\mu\left\{Z \ge \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right\}$
$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)$	$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right)$
	$= \Phi\left(-\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)$

Para ambas hipótesis alternativas unilaterales el tamaño de muestra para obtener una probabilidad de cometer un error de tipo II β es:

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

OBSERVACIONES

1. En el caso de tests unilaterales no es necesario aproximar para obtener el tamaño de muestra.

2. Como ϕ es una función de distribución acumulada, es una función creciente de su argumento. Resulta entonces que $\underline{\beta(\mu)} = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} + z_\alpha \right)$ es una función <u>decreciente de μ</u>. Esto es coherente con la intuición ya que es razonable que cuanto más alejada de μ_0 esté la media verdadera μ tanto menos probable será no rechazar H0.

3. El test cuya región de rechazo es $Z > z_\alpha$, fue diseñado para decidir entre **H0:** $\mu = \mu_0$ y Ha: $\mu > \mu_0$ también puede utilizarse para testear las hipótesis

H0: $\mu \le \mu_0$ contra Ha: $\mu > \mu_0$.

Para verificar que el test sigue siendo de nivel α, tenemos que verificar que la probabilidad de rechazar H0 cuando H0 es verdadera nunca supera a α.

Debemos verificar que

$$1-\beta(\mu) \le \alpha \quad \text{para todo } \mu \le \mu_0$$

ó

$$\beta(\mu) \ge 1 - \alpha \quad \text{para todo } \mu \le \mu_0$$

Pero

$$\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} + z_\alpha \right) \ge \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

4. Análogamente, cuando la alternativa es Ha: $\mu < \mu_0$ la hipótesis nula se puede extender a H0: $\mu \ge \mu_0$ es decir que el test unilateral se extiende a

H0: $\mu \ge \mu_0$ contra Ha: $\mu < \mu_0$

6. RELACIÓN ENTRE INTERVALOS DE CONFIANZA Y TESTS DE HIPÓTESIS BILATERALES

Un intervalo de confianza para μ basado en una muestra normal con varianza conocida σ^2 con nivel de confianza 100(1-α)% es

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Por lo tanto si $\mu = \mu_0$

$$P\left\{\mu_0 \in \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\} = 1-\alpha$$

Un test de nivel α para testear H0: $\mu = \mu_0$ contra Ha: $\mu \neq \mu_0$ de nivel α, basado en el intervalo, consiste en rechazar H0 cuando

$$\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left\{\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\} = \alpha$$

Este test es idéntico al presentado anteriormente:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left\{\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\} \\
&= P\left\{\mu_0 < \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \acute{o} \quad \mu_0 > \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= P\left\{(\mu_0 - \overline{X}) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2} \quad \acute{o} \quad (\mu_0 - \overline{X}) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}\right\} \\
&= P\left\{|Z| > z_{\alpha/2}\right\}
\end{aligned}$$