

## Repaso de probabilidades

1. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\Gamma(n, \lambda)$  si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x} I_{[0, \infty)}(x) \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Probar que:

- (a)  $E(X) = n/\lambda$  y  $V(X) = n/\lambda^2$ .  
 (b) Si  $a > 0$ , entonces  $aX \sim \Gamma(n, \lambda/a)$ .  
 (c) Si  $Y \sim \Gamma(m, \lambda)$  independiente de  $X$ , entonces  $X + Y \sim \Gamma(n + m, \lambda)$ .
2. (a) Si  $Z \sim N(0, 1)$ , probar que  $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ .  
 (NOTA: Usar que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .)  
 (b) La distribución  $\Gamma(n/2, 1/2)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , se denomina  $\chi_n^2$  (chi-cuadrado con  $n$  grados de libertad). Probar que si  $Z_1, \dots, Z_n$  son v.a. independientes con distribución  $N(0, 1)$ , entonces  $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$ .
3. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\beta(r, s)$  si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \cdot x^{r-1} (1-x)^{s-1} I_{[0,1]}(x).$$

Probar que:

- (a)  $E(X) = r/(r+s)$  y  $V(X) = rs/[(r+s)^2(r+s+1)]$ .  
 (b) Analizar el caso en que  $r = s = 1$ .
4. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\mathcal{C}(0, 1)$  si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$$

- (a) Probar que  $X$  no tiene momentos finitos de ningún orden.  
 (b) Si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes y tienen distribución  $\mathcal{C}(0, 1)$ , mostrar que  $\bar{X}_n \sim \mathcal{C}(0, 1)$ . ¿Vale la Ley de los Grandes Números?
5. (a) Sea  $X$  una v.a. con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Encontrar la función característica de  $X$ .  
 (b) Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  independientes, demostrar que  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .  
 (c) Probar que si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y|X = x \sim Bi(x, p)$  entonces  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ .
6. Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de variables aleatorias tales que  $X_n \rightarrow X$  e  $Y_n \rightarrow Y$  en probabilidad (o c.s., respectivamente). Probar que:

- (a)  $X_n$  está acotada en probabilidad en ambos casos. También, si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ , entonces  $X_n$  está acotada en probabilidad.

- (b) Si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $g(X_n, Y_n) \rightarrow g(X, Y)$  en probabilidad o c.s., respectivamente.
7. Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de v.a. tales que  $X_n$  está acotada en probabilidad e  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ , demostrar que  $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ .
8. (a) Probar que si  $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  entonces  $X_n \xrightarrow{p} \mu$   
 (b) Deducir la Ley Débil de los Grandes Números a partir del Teorema Central del Límite.
9. (Teorema de Slutsky) Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de v.a. y  $a$  una constante tales que  $X_n \xrightarrow{p} a$  e  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ . Probar que:
- (a)  $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a + Y$ .  
 (b)  $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aY$ .
10. Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de v.a. tales que

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2).$$

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g$  es derivable,  $g'$  es continua en  $\mu$  y  $g'(\mu) \neq 0$ .

- (a) Demostrar que

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2).$$

- (b) ¿Cuál sería la distribución asintótica de

$$n(g(X_n) - g(\mu))$$

si  $g'(\mu) = 0$  pero  $g''$  es continua en  $\mu$  y  $g''(\mu) \neq 0$ ?

11. (Desigualdad de Jensen) Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Y sea  $X$  una variable aleatoria con esperanza finita probar que

$$E(\phi(X)) \geq \phi(E(X))$$

12. Sea  $X$  una variable aleatoria y sea  $m$  una mediana de  $X$ . Probar que

$$m = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} E(|X - c|).$$