Consistencia y distribución asintótica.

1. (a) Sea δ_n un estimador con $V_\theta(\delta_n) < \infty$. Probar que si $\mathrm{ECM}_\theta(\delta_n) \to 0$, entonces δ_n es débilmente consistente.

   (b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $E_\theta(X) = \theta$ y $V_\theta(X) < \infty$. Consideremos el siguiente estimador aleatorizado de θ :

   $$\delta_n = (1 - \varepsilon_n)\bar{X} + \varepsilon_n n$$

   donde $\varepsilon_n \sim Bi(1, 1/n)$ y es independiente de las X_i. Probar que δ_n es débilmente consistente, aunque $\mathrm{ECM}_\theta(\delta_n) \to \infty$.

2. Sea Θ un espacio paramétrico finito y δ_n el EMV de θ. Probar que δ_n es débilmente consistente si y sólo si $P_\theta(\delta_n = \theta) \to 1\ \forall\theta \in \Theta$.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$.

   (a) Probar que el EMV de θ es fuertemente consistente y asintóticamente eficiente.

   (b) Hallar el estimador de momentos de θ basado en el segundo momento y probar que es fuertemente consistente.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Consideremos $\delta_n = \bar{X}$ y

   $$\delta_n^* = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

   (a) Analizar si estos estimadores de λ son fuertemente consistentes.

   (b) Hallar sus distribuciones asintóticas. Decir si alguno de los dos es asintóticamente eficiente.
   (Nota: $E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$)

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $U(0, \theta)$.

   (a) Probar que el EMV de θ es debilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.

   (b) Probar que el estimador de momentos para θ es fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.

   (c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría?¿Por qué?

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

   $$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

   (a) Probar que el EMV de θ es debilmente y furtemente consistente y hallar su distribución asintótica.

   (b) Probar que el estimador de momentos para θ es consistente y hallar su distribución asintótica.

(c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría?¿Por qué?

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $F_0(x-\theta)$ con F_0 una función de densidad fija y $\theta \in I\!R$. Sea δ_n un estimador de θ equivariante por traslaciones (i.e.: para cualquier constante $c \in I\!R$ se verifica que $\delta_n(x_1+c, \ldots, x_n+c) = \delta_n(x_1, \ldots, x_n) + c$). Mostrar que la varianza asintótica de δ_n (si existe) no depende de θ.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución F con densidad $f(x-\mu)$ donde $f(x)$ satisface: i) $f(x) = f(-x)$, ii) $f'(0) > 0$ y iii) $f(x)$ continua en $x = 0$.

   (a) Sea $Z_{a,i} = I\{X_i \leq a\}$.Mostrar que $Z_{a,i}$ tiene distribución $\mathrm{Bi}(1, F(a))$.

   (b) Sea $Z_a = \sum Z_{a,i}$. Mostrar que Z_a tiene distribución $\mathrm{Bi}(n, F(a))$.

   (c) Probar que
   $P(Z_a \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1) \leq P(\text{mediana}(X_{1,\ldots,}X_n) \leq a) \leq P(Z_a \geq \left[\frac{n}{2}\right])$

   (d) Mostrar que mediana$(X_{1,\ldots,}X_n)$ es un estimador débilmente consistente de μ.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. $N(\theta, 1)$. Definamos el estimador

$$\delta_n = \begin{cases} \bar{X} & \text{si } \left|\bar{X}\right| \geq 1/n^{1/4} \\ \frac{1}{2}\bar{X} & \text{si } \left|\bar{X}\right| < 1/n^{1/4} \end{cases}$$

   Probar que $\sqrt{n}(\delta_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, v(\theta))$ con $v(\theta) = 1/\mathrm{I}(\theta)$ $\forall \theta \neq 0$ y $v(0) < 1/\mathrm{I}(0)$.

   Observar que δ_n no verifica en $\theta = 0$ la desigualdad de Rao-Cramer. $\theta = 0$ se dice un punto de supereficiencia