A) Estimadores de Bayes.

1. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de F_θ y $\boldsymbol{\theta} \sim \tau$. Se quiere encontrar el estimador de Bayes de θ con función de pérdida $l(\theta, d)$. Definamos para cada valor de x

$$\delta(x) = \arg\min_d E\left(l(\boldsymbol{\theta}, d) \,|\mathbf{X} = \mathbf{x}\right).$$

y supongamos que este valor esta bien definido para todo x. Probar que $\delta(x)$ es el estimador bayes de θ.

   (b) Hallar el estimador de Bayes de θ cuando $l(\theta, d) = w(\theta)(\theta - d)^2$ con $w(\theta) > 0$ y $E(w(\theta)) < \infty$.

   (c) Hallar el estimador de Bayes de θ cuando $l(\theta, d) = |\theta - d|$.

2. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de F_θ y $\boldsymbol{\theta}$ tiene distribución a priori τ. Se quiere estimar $q(\theta)$ con función de pérdida cuadrática. Probar que si $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ, entonces el estimador de Bayes de $q(\theta)$ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de T.

3. (a) Sea $\boldsymbol{\theta}$ con distribución a priori τ y $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de F_θ. Se desea estimar $q(\theta)$ utilizando la función de pérdida cuadrática. Demostrar que si el estimador de Bayes $\delta_\tau(\mathbf{X})$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$, es decir

$$E\left(\delta_\tau(\mathbf{X}) \mid \boldsymbol{\theta} = \theta\right) = q(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta,$$

entonces $E\left[\left(\delta_\tau(\mathbf{X}) - q(\boldsymbol{\theta})\right)^2\right] = 0$.

   (b) Mostrar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ para ninguna distribución a priori τ cuando $X \sim N(\theta, 1)$.

4. Sea X una v.a. tal que $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(2, 1)$.

   (a) Encontrar el estimador de Bayes cuando $l(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

   (b) Encontrar el estimador de Bayes cuando $l(\theta, d) = |\theta - d|$.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i \sim Bi(1, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \tau$ continua. Consideremos la función de pérdida cuadrática.

   (a) Probar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ.

   (b) Hallar el estimador de Bayes δ_τ cuando $\tau = \beta(r, s)$, con $r, s > 0$. Mostrar que δ_τ es un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{r+s}$. Interpretar.

   Recordar: que $\boldsymbol{\theta} \sim \beta(r, s)$ si su función de densidad es

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1} I_{(0,1)}(\theta)$$

   (c) Encontrar el estimador de Bayes de θ con función de pérdida $l(\theta, d) = \dfrac{(\theta - d)^2}{[\theta(1-\theta)]}$.

6. Consideremos una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i \sim \mathcal{P}(\theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.

   (a) Encontrar el estimador Bayes δ_τ y calcular $r(\delta_\tau, \tau)$ el riesgo de Bayes.

   (b) Mostrar que δ_τ puede escribirse como un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{\lambda}$. Interpretar.

   (c) Comparar $r(\delta_\tau, \tau)$ con $r\left(\bar{X}, \tau\right)$. Mostrar que $\dfrac{r\left(\bar{X}, \tau\right)}{r(\delta_\tau, \tau)} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

   (d) Encontrar el estimador de Bayes de θ para la función de pérdida $l(\theta, d) = \dfrac{(\theta - d)^2}{\theta}$ y calcular $r(\delta_\tau, \tau)$.

B) Estimadores minimax y admisibles.

1. Demostrar que si un estimador es admisible y tiene riesgo constante, entonces es minimax.

   Recordar: $\delta(\mathbf{X})$ es un estimador *admisible* de θ si y sólo si no existe ningún otro estimador que sea uniformemente mejor que el. Es decir, no existe $\delta^*(\mathbf{X})$ tal que $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta) \quad \forall \theta \in \Theta$, siendo $R(\theta, \delta) = E\left(l(\boldsymbol{\theta}, \delta(\mathbf{X})) \,|\, \boldsymbol{\theta} = \theta\right)$ el riesgo frecuentista.

2. Sea $X \sim Bi(n, \theta)$ y supongamos que se quiere estimar θ con función de pérdida cuadrática. Dado $0 < \varepsilon < 1$, consideremos el estimador aleatorizado

   $$\delta_\varepsilon(X) = (1 - \tau) \cdot \frac{X}{n} + \tau \cdot \frac{1}{2}$$

   donde $\tau \sim \mathrm{Bi}(1, \varepsilon)$ y es independiente de X.

   (a) Calcular $R(\theta, \delta_\varepsilon)$, la función de riesgo de δ_ε, y verificar que para $\varepsilon = 1/(n+1)$ es constante y menor que $\sup_\theta R(\theta, X/n)$. Concluir entonces que X/n no es minimax.

   (b) Demostrar que

   $$\delta^*(X) = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \cdot \frac{X}{n} + \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2}$$

   es minimax y admisible.

   Sugerencia: usar el ejercico 5 de la parte anterior.

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. tal que $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, mostrar que $\bar{X}$ es minimax para la función de pérdida $l(\theta, d) = (\theta - d)^2 / \theta$.