A) Familias exponenciales.

1. Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales. En cada caso, hacer una elección explícita de $a(\theta)$, $h(\mathbf{x})$, $c_j(\theta)$ y $t_j(\mathbf{x})$ y exhibir un estadístico suficiente para θ.

   (a) $\mathcal{P}(\theta)$; $\theta > 0$.

   (b) $N(\mu, \sigma^2)$; $\theta = (\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$, con $\mu \in I\!R$ y $\sigma^2 > 0$.

   (c) $\Gamma(r, \lambda)$; $\theta = (\mathbf{r}, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.

   (d) $\mathcal{M}(n, \theta_1, \ldots, \theta_k)$; $\theta = (\boldsymbol{\theta_1}, \ldots, \boldsymbol{\theta_k})$, con $0 < \theta_j < 1$, $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$ y n conocido.

   (e) $BN(r, \theta)$; $0 < \theta < 1$ y r conocido.

   (f) $\beta(r, s)$; $\theta = (\mathbf{r}, \mathbf{s})$, con $r, s > 0$.

2. Consideremos la familia de distribuciones normales bivariadas $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, donde $\theta = (\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\sigma_1^2}, \boldsymbol{\sigma_2^2}, \rho)$, con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $|\rho| < 1$, cuya densidad conjunta es:

$$f(x, y; \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \exp\left\{ -\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{2(1-\rho^2)} \right\}$$

   (a) Probar que esta familia es exponencial.

   (b) Encontrar un estadístico suficiente para θ a partir de una m.a. $X_1, \ldots, X_n$.

3. (a) Sea $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial. Probar que el soporte de $f(x; \theta)$ no depende de θ.

   (b) Mostrar que la familia $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 0\}$ no es exponencial.

4. Consideremos $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una $f(\mathbf{x}; \theta)$ que pertenece a una familia exponencial a k parámetros en forma canónica. Sea $\psi(\theta)$ tal que $a(\theta) = \exp\{-\psi(\theta)\}$. Mostrar que el EMV de θ satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_j}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_j(\mathbf{X_i}), \text{para} \quad j = 1, \ldots, k.$$

B) Estimadores IMVU.

1. Sea δ_0 un estimador insesgado de $q(\theta)$. Definamos la clase de estadísticos
   $\mathcal{U} = \{U : E_\theta(U) = 0 \quad \forall \quad \theta\}$.
   Probar que cualquier estimador insesgado de $q(\theta)$ es de la forma $\delta = \delta_0 - U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

2. Sea X una v.a. tal que $R_X = \{-1\} \cup I\!N_0$ cuya función de probabilidad puntual está dada por

$$p_X(-1) = \theta, \;\; p_X(k) = (1-\theta)^2 \theta^k \text{ si } k \in I\!N_0, \text{ para } \theta \in (0,1).$$

   (a) Sean $\delta_1 = I\{X = -1\}$ y $\delta_2 = I\{X = 0\}$. Probar que δ_1 es un estimador insesgado de $q_1(\theta) = \theta$ y δ_2 es un estimador insesgado de $q_2(\theta) = (1-\theta)^2$.

(b) Mostrar que $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $U = aX$ para alguna constante $a \in I\!R$.
Sugerencia: usar que $1/(1-r)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} kr^{k-1}$ si $|r| < 1$.

(c) Probar que existe un estimador IMVU para $q_2(\theta)$ pero no para $q_1(\theta)$.

3. *Sean δ_1 y δ_2 dos estimadores IMVU de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ respectivamente, y $c_1, c_2 \in I\!R$. Demostrar que $c_1\delta_1 + c_2\delta_2$ es IMVU de $c_1 q_1(\theta) + c_2 q_2(\theta)$.*

C) Completitud.

1. Consideremos una familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ y sea T un estadístico suficiente para $\mathcal{P}$. Supongamos que $\delta(T)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$. Entonces δ es el único estimador insesgado que es función de T si y sólo si T es completo para $\mathcal{P}$.

2. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son completos.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, 1)$.

   (a) Mostrar que $T = (X_1, \sum_{i=2}^{n} X_i)$ es suficiente para μ pero no completo.

   (b) Hallar un estadístico completo y un estimador IMVU de μ.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$. Probar que $X_{(n)}$ es completo para θ.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$, con $\theta \in \Theta \subset (0, 1)$.

   (a) Mostrar que si Θ tiene más de n puntos, el estadístico $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es completo.

   (b) Deducir que $\bar{X}$ es IMVU de θ.

   (c) Mostrar que $q(\theta) = \theta/(1-\theta)$ no es estimable mediante un estimador insesgado.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

   (a) Mostrar que si σ^2 es conocido, $\bar{X}$ es IMVU para μ.

   (b) Mostrar que si μ es conocido, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ es IMVU para σ^2.

   (c) Mostrar que si ambos parámetros son desconocidos, entonces $\bar{X}$ es IMVU para μ y s^2 es IMVU para σ^2.

7. En el ejercicio 13 de la Práctica 2, hallar estimadores IMVU para λ, λ^2 y μ.

8. En el ejercicio 14 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para $q(\theta)$.

9. En el ejercicio 15 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para p.

10. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Hallar un estimador IMVU de θ.

11. Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos m.a. independientes, con distribución $N(\mu, \sigma_1^2)$ y $N(\mu, \sigma_2^2)$ respectivamente. Consideremos el parámetro $\theta = (\mu, \sigma_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}, \sigma_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}})$.

    (a) Probar que $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum X_i, \sum Y_j, \sum X_i^2, \sum Y_j^2\right)$ es suficiente para θ pero no completo.

(b) Supongamos que $r = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ es conocido. Probar que

$$T^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i + r \sum_{j=1}^{m} Y_j, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + r \sum_{j=1}^{m} Y_j^2 \right)$$

es completo para θ. Hallar un estimador IMVU de μ.

D) Estadísticos minimales suficientes.

1. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son minimales.
2. Sea X_1 una variable $N(\mu, \sigma_1^2)$ y X_2 con distribución $N(\mu, \sigma_2^2)$ independiente de X_1. Probar que $T = (X_1, X_2, X_1^2, X_2^2)$ es minimal suficiente pero no completo y que no existe un estimador IMVU para μ.

E) Desigualdad de Rao–Cramer.

1. Probar que si $f(x; \theta)$ admite derivada segunda respecto de θ y si se puede derivar dentro de la integral, entonces
$$I(\theta) = -E_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X; \theta) \right].$$
2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$.
   (a) Calcular el número de información de Fisher $I_1(\theta)$.
   (b) Mostrar que $\bar{X}$ alcanza la cota de Rao–Cramer y deducir que es IMVU para θ.
3. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y sean μ y $\delta^*(T)$ como en el ejercicio 13 de la Práctica 2. Mostrar que aunque $\delta^*(T)$ es un estimador IMVU de μ, la cota de Rao–Cramer es estrictamente menor que $V_\lambda(\hat{\mu})$.
4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$, con σ_0^2 conocido.
   (a) Mostrar que $\bar{X}$ es un estimador IMVU para μ, usando la desigualdad de Rao–Cramer.
   (b) Mostrar que $\bar{X}^2 - \sigma_0^2/n$ es un estimador IMVU de μ^2, aunque no alcanza la cota de Rao–Cramer.