Estadística Teórica **Primer Parcial - 15 de octubre de 2008**

El parcial se aprueba con 50 puntos de incisos completos.

Ejercicio 1. **30 ptos.** Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de variables $G(p)$, es decir que $f_p(x) = p(1-p)^{x-1}$

a) Probar que $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente para p

b) Mostrar que $I\{X_n = 1\}$ es un estimador insesgado de p

c) Construir otro estimador insesgado de p mejor que el anterior. ¿Es insesgado? ¿En qué sentido es mejor? Justificar

Ayuda: Recordar que si $X_1, X_2, ..., X_n \overset{iid}{\sim} G(p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN(n,p)$

Ejercicio 2. **35 ptos.** Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x e^{-(x^2/2\theta)} I_{(0,\infty)}(x) \quad \text{con} \quad \theta > 0$$

a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de $q(\theta) = P(X > 1)$ y su distribución asintótica.

b) Sea $Y_i = I\{X_i > 1\}$, probar que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$ y hallar su distribución asintótica

c) ¿En el caso en que $\theta = 0.5$, cuál de los dos estimadores preferiría y porqué? Justificar.

Ejercicio 3. **35 ptos.** Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (1-\theta)e^{x} & x < 0 \\ \theta^2 e^{-\theta x} & x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{con } \theta \in (0,1)$$

o equivalentemente

$$f_\theta(x) = \left[(1-\theta)e^{x}\right]^{I\{x<0\}} \left[\theta^2 e^{-\theta x}\right]^{I\{x \geq 0\}}$$

a) Probar que $T(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i I\{X_i \geq 0\}, \sum_{i=1}^{n} I\{X_i \geq 0\}\right)$ es un estadístico suficiente para θ.
(Tener en cuenta que $I\{X_i < 0\} = 1 - I\{X_i \geq 0\}$)

b) Probar que $E_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i I\{X_i \geq 0\}\right) = n$

c) Probar que $T(\mathbf{X})$ no es completo

d) Probar que $\delta(T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \geq 0\}$ es un estimador insesgado de θ cuya varianza no alcanza la cota de Rao–Cramer.
(Tener en cuenta que $E(I\{X_i < 0\}) = \theta$)

Ayuda para los ejercicios 2 y 3

Utilizar si es necesario que de acuerdo a los resultados sobre momentos de una distribución exponencial se tiene

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1, \quad \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$