Estadística Teórica **Segundo Parcial - 15 de diciembre de 2008**

El parcial se aprueba con 50 puntos de incisos completos.

Ejercicio 1. **33 ptos.** Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de variables tal que $X/\theta \sim G(\theta)$ y $\theta \sim \beta(a,b)$. Se quiere estimar $q(\theta) = 1/\theta$.

a) Hallar la distribución de θ condicionado a $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$, es decir $f_{\theta/\underset{\sim}{x}}(\theta)$,siendo $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

b) Calcular el estimador de Bayes de $q(\theta)$ si se usa como función de pérdida
$L(q(\theta), d) = \theta^2 \left(d - q(\theta)\right)^2$

Ayuda:

Función de probabilidad puntual $G(\theta) : p(x) = \theta(1-\theta)^{x-1} I_{\mathbb{N}}(x)$
Función de densidad $\beta(a,b) : f(x) = \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$ con $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$ y $V(X) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Ejercicio 2. **34 ptos.** Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}\, I_{[0,\theta)}(x)$$

y sea $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$

a) Mostrar que $U = T/\theta$ tiene distribución independiente de θ.

b) Usando a) hallar un intervalo de confianza para θ de nivel $1-\alpha$.

c) Hallar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ de nivel $1-\alpha$.

Ejercicio 3. **33 ptos.**Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad en la familia

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} I_{(1,\infty)}(x), \theta > 0$$

a) Hallar un test UMP de nivel α para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.Escribir la región de rechazo del test en función del percentil de alguna distribución tabulada.

b) Hallar la función de potencia $\beta(\theta)$ y expresarla en términos de una función de distribución conocida
Ayuda:
Asuma que $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \sim \Gamma(n, \theta)$