Tests de Hipótesis (DOCIMACIA)

$X \sim F_X(x;\theta) \qquad \theta \in \Theta$

Queremos decidir entre dos hipótesis competitivas

$H: \theta \in \Theta_0$ hipótesis nula

$K: \theta \in \Theta_1$ " alternativa

$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

$\Theta_0 \cup \Theta_1 \not\subset \Theta$

está permitido

Ej H Agua buen
K Agua contaminada

$\boxed{\begin{array}{l} H \text{ Agua cont} \\ K \text{ Agua buen} \end{array}}$ α

$H \quad \mu \leq 0 \qquad\qquad H \quad \mu \in [1,2]$

$K \quad \mu > 0 \qquad\qquad K \quad \mu \in [3,10]$

Regla de decisión: nos dice cual hipótesis elegir basado en los datos. Se especifica a traves de una región crítica W (o de rechazo)

si $x \in W$ rechazamos H en favor de K

$x \notin W$ no rechazamos H.

Función crítica

$$\delta(X) = 1_W(X) = \begin{cases} 1 & X \in W \quad \text{rechazamos } H \\ 0 & X \notin W \quad \text{no "} \end{cases}$$

Test "no aleatorizado"

$$= P_\theta[\text{Rechazar } H \mid X]$$

El desempeño de una función crítica depende del parámetro y se mide con la potencia

$$\beta(\theta, \delta) = P_\theta [\text{Rechazar } H]$$

$$= E_\theta [P_\theta [\text{Rechazar } H \mid X]]$$

$$= E_\theta \delta(X) = P_\theta (X \in \omega)$$

Idealmente queremos que $\beta(\theta,\delta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_1 \\ 0 & \theta \in \Theta_0 \end{cases}$

pero esto es generalmente imposible.

Def El nivel de un test se define por

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \beta(\theta, \delta)$$

Ej $X = (X_1 \dots X_n) \qquad X_i \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$

$H: \theta \in (-\infty, 0] \iff \theta \leq 0$

$K: \theta \in (0, \infty) \iff \theta > 0$

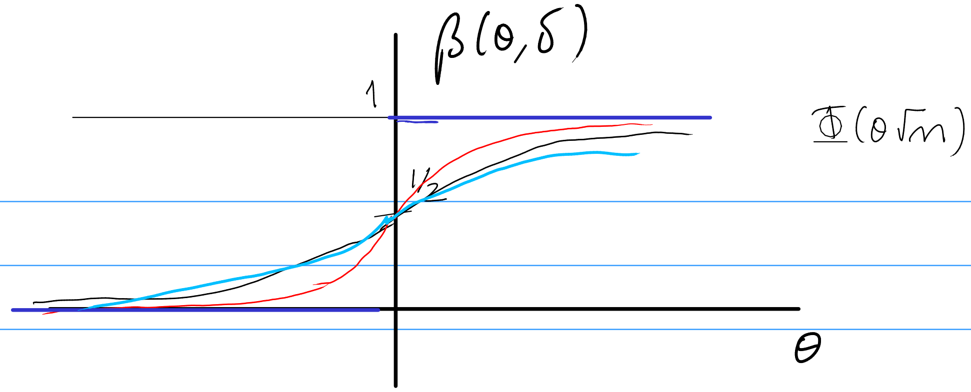
Proponemos rechazar H si $\bar{X} > 0$

$$\omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : \tfrac{1}{n} \sum x_i > 0 \} \qquad \bar{X} \sim N(\theta, \tfrac{1}{n})$$

y la potencia es

$$\beta(\theta,\delta) = P_\theta [\text{Rechazar } H] = P_\theta(\bar{X} > 0) = P_\theta \left(\frac{\bar{X} - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{-\theta}{1/\sqrt{n}} \right)$$

$$= 1 - \Phi(-\theta\sqrt{n}) = \Phi(\theta\sqrt{n})$$



$$\alpha = \sup_{\theta \leq 0} \beta(\theta,\delta) = 1/2$$

Preguntas 1) ¿Cómo llegamos a este test?

2) ¿hay mejores? $me > 0$

3) ¿cómo medir la optimalidad?

Def Una hipótesis (H o K) se llama simple ssi $\# \Theta_0 = 1$ o $\Theta_0 = \{\theta_1\}$

Tests simple vs simple

$H: \theta = \theta_0$

$K: \theta = \theta_1$

Def Un test δ^* con nivel α se llama uniformemente más potente (UMP) ssi

$$\beta(\theta,\delta^*) \geq \beta(\theta,\delta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

$\forall$ test competitivo δ con nivel α

Cociente de verosimilitudes

$$L(x,\theta_0,\theta_1) = \frac{f_X(x;\theta_1)}{f_X(x;\theta_0)}$$

Def Un test (no aleatorizado) de cociente de verosimilitudes δ_k rechaza H si $L(X, \theta_0, \theta_1) \geq k$.

(dde en gral $k = k(\alpha)$)

δ y δ_k tienen ambos nivel α

Teorema (Lema de Neyman-Pearson)

Si $\beta(\theta_0, \delta) \overset{=}{\leq} \beta(\theta_0, \delta_k)$

entonces $\beta(\theta_1, \delta) \leq \beta(\theta_1, \delta_k)$

Entonces δ_k es UMP para

$H: \theta = \theta_0$ vs $K: \theta = \theta_1$

δ_k es UMP para simple vs simple

H_0 es	H_0 se Acepta	H_0 se Rechaza
cierta	X	Error I
falsa	Error II	X

$P(I) = \alpha$

$$P(\text{Error II}) = 1 - \beta(\theta_1, \delta)$$

\+ + + − −

100% 300% 500% −0.01% −0.02%

Dem Derivación como problema optimización

$$\max_{\delta} \underbrace{\beta(\theta_1, \delta) = E_{\theta_1} \delta(X) = \int \delta(x) f(x; \theta_1)\, dx}_{\text{fn objetivo}}$$

s.a $\quad \beta(\theta_0, \delta) = \alpha = E_{\theta_0} \delta(X) = \int \delta(x) f_X(x;\theta_0)\, dx$

$\mathcal{L}(\delta) = \beta(\theta_1, \delta) - k\left[\beta(\theta_0, \delta) - \alpha\right]$ LAGRANGE

$= \beta(\theta_1, \delta) - k\,\beta(\theta_0, \delta) + k\alpha$ OPT LIBRE

$= \int \delta(x) f_X(x;\theta_1)\, dx - k \int \delta(x) f_X(x;\theta_0)\, dx + \alpha k$

$= \int \delta(x) \left[f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0)\right] dx + \alpha k$

$= \int_{f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0) > 0} \delta(x) \left|f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0)\right| dx -$

$- \int_{f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0) < 0} \delta(x) \left|f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0)\right| dx + \alpha h$

Se maximiza con

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0) > 0 \\ 0 & f_X(x;\theta_1) - k f_X(x;\theta_0) < 0 \end{cases}$$

Si es lícito

$L(x, \theta_0, \theta_1)$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \dfrac{f_X(x;\theta_1)}{f_X(x;\theta_0)} > k \\ 0 & < k \end{cases}$$

$\delta(x) = \delta_k(x)$ □.

Ej $\quad X_1 \sim f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \qquad x \geq 0 \qquad \theta > 0$

$H: \theta = 1$

$K: \theta = \theta_1$ (algún valor conocido $\theta_1 > 1$)

$$\boxed{L(x; \theta_0; \theta_1) = \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 x}}{e^{-x}} > k} \quad NP.$$

$$e^{-(\theta_1 - 1)x} > k/\theta_1$$

$$-(\theta_1 - 1)x > \log(k/\theta_1)$$

$$x < -\frac{\log(k/\theta_1)}{(\theta_1 - 1)}$$

región rechazo

$$\boxed{x < k'}$$

Si quiero nivel α debo resolver

$$P_1(X < k') = \alpha \qquad e^{-k'} = 1 - \alpha$$

$$\int_0^{k'} e^{-x}\,dx = \alpha \qquad -k' = \log(1-\alpha)$$

$$1 - e^{-k'} = \alpha \qquad k' = -\log(1-\alpha)$$

$$-\log[1 - 0.05]$$

Finalmente el test UMP de nivel α es rechazar si $x < -\log(1-\alpha)$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x < -\log(1-\alpha) \\ 0 & x \geq -\log(1-\alpha) \end{cases}$$

Notar que (por alguna razón) el valor de θ_1 desapareció en el test

O sea que nuestro test es UMP para

$H: \theta = 1$ $\quad$ $H: \theta = 1$ $\quad$ $H: \theta = 1$

$K: \theta = 2$ $\quad$ $K: \theta = 1.2$ $\quad$ $K: \theta = 1000$ $\quad$ etc

O sea UMP para $\begin{array}{l} H: \theta = 1 \\ K: \theta > 1 \end{array}$

Ej $X_1, \ldots X_n \overset{iid}{\sim} B(\theta)$

$H: \theta = 1/2$

$K: \theta > 1/2$

$(\theta_1 > 1/2)$

$$f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i} (1-\theta)^n$$

$$L(x; 1/2; \theta_1) = \frac{\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{\sum x_i} (1-\theta_1)^n}{\cancel{\left(\frac{1/2}{1-1/2}\right)^{\sum x_i}} (1-1/2)^n} > k$$

$$\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{\sum x_i} > \frac{k \, (1-1/2)^n}{(1-\theta_1)^n} = k'$$

$$(\sum x_i) \log \left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) > \log k'$$

$$\sum x_i > \underbrace{(\log k') / \log \left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)}_{k''}$$

$$\boxed{\sum x_i > k''}$$

para lograr nivel α

$$P_{1/2}\left[\sum x_i > k''\right] = \alpha$$

Supongamos $n = 10$ $\alpha = 0.05$ $\sum x_i \sim B(10, 1/2)$ bajo H

$$P_{1/2}\left[\sum x_i > k''\right] = 1 - F_{B(10;1/2)}(k'') = g(k'')$$

k''	$g(k'')$	
0	$1-(1/2)^{10}$	ACEP
	$\vdots$	
$\boxed{7}$	$\boxed{0.0546875}$	
	$\vdots$	
10	0	Rechaz

$$g(0) = 1 - F_{B(10;1/2)}(0)$$

$$= P(\ \ > 0) = 1 - (1/2)^{10}$$

No es posible satisfacer.

Solucion

$$\delta_\gamma(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 8 \\ \gamma & x = 7 \\ 0 & x \leq 6 \end{cases}$$

O sea si sale $x=7$ rechazan H con probabilidad γ donde γ resuelve

$$\cancel{\gamma\, P[\sum x > 7] = 0.05}$$

MAL

$$\cancel{\gamma = \frac{0.05}{0.0546875}} = 0.914285$$

$$E\,\delta_\gamma(x) = \alpha$$

$$E_{1/2}\,\delta_\gamma(x) = 0\, P_{1/2}(\sum x \leq 6) + 1\, P_{1/2}(\sum x \geq 8)$$
$$+ \gamma\, P(\sum x = 7) = \alpha$$

$$P_{1/2}(\Sigma X \geq 8) + P(\Sigma X = 7)\gamma = \alpha$$

$$\gamma = \frac{\alpha - P_{1/2}(\Sigma X \geq 8)}{P(\Sigma X = 7)}$$

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0107}{(0.0547 - 0.0107)} = 0.89318 \quad //$$