A) Estimadores de Bayes.

1. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim F_\theta$ y $\boldsymbol{\theta}$ tiene distribución a priori Λ. Se quiere estimar $q(\theta)$ con función de pérdida cuadrática. Probar que si $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ, entonces el estimador de Bayes de $q(\theta)$ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de T.

2. (a) Sea $\boldsymbol{\theta}$ con distribución a priori Λ y $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim F_\theta$. Se desea estimar $q(\theta)$ utilizando la función de pérdida cuadrática. Demostrar que si el estimador de Bayes $\delta_\Lambda(\mathbf{X})$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$, es decir
$$E\left(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) \mid \boldsymbol{\theta} = \theta\right) = q(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta,$$
entonces $E\left[\left(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) - q(\boldsymbol{\theta})\right)^2\right] = 0.$

   (b) Mostrar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ para ninguna distribución a priori Λ cuando $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim N(\theta, 1)$

3. Sea X una v.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(2, 1)$.

   (a) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

   (b) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = |\theta - d|$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim Bi(1, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Lambda$ continua. Consideremos la función de pérdida cuadrática.

   (a) Probar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ.

   (b) Hallar el estimador de Bayes δ_Λ cuando $\Lambda = \beta(r, s)$, con $r, s > 0$. Mostrar que δ_Λ es un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{r+s}$. Interpretar.

   Recordar: que $\boldsymbol{\theta} \sim \beta(r, s)$ *si su función de densidad es* $f(\theta) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1} I_{(0,1)}(\theta)$

5. Consideremos una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{P}(\theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.

   (a) Encontrar el estimador Bayes δ_Λ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$ el riesgo de Bayes.

   (b) Mostrar que δ_Λ puede escribirse como un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{\lambda}$. Interpretar.

   (c) Encontrar el estimador de Bayes de θ para la función de pérdida $L(\theta, d) = \dfrac{(\theta - d)^2}{\theta}$ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$.

B) Estimadores minimax y admisibles.

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim Bi(1, \theta)$, probar que $\bar{X}$ es minimax y admisible para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / [\theta(1-\theta)]$.

   Tener en cuenta que para la función de pérdida mencionada $\bar{X}$ es el estimador de Bayes de θ cuando $\theta\tilde{\ }U(0, 1)$

2. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{P}(\theta)$, mostrar que $\bar{X}$ es el único minimax para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / \theta$.