A) Intervalos de confianza para una muestra.

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ (σ_0^2 conocido) .Supóngase que se pide un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$. Mostrar que al elegir $A = z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $B = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene el intervalo de longitud mínima entre los contruidos considerando $A = z_\beta$ y $A = z_\delta$, con $\beta + \delta = \alpha$

2. Se trata de medir el período de un péndulo y se tiene un cronómetro de precisión conocida (es decir, se conoce la varianza del error). Se supone que las observaciones son de la forma $Y_i = \mu + \varepsilon_i$, donde los ε_i tienen distribución $N(0, 1/4)$ y son independientes. Los datos obtenidos son:

$$5.1 \quad 5.2 \quad 5.6 \quad 5.1 \quad 5.5 \quad 5.8 \quad 5.9 \quad 4.9 \quad 5.2 \quad 5.6$$

   (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.

   (b) ¿Cuál debería haber sido el tamaño de la muestra si se hubiera deseado que la longitud del intervalo fuese a lo sumo 0.10?

3. La distribución del índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar entre esta población y se obtienen los siguientes valores:

1.52	1.65	1.72	1.65	1.72	1.83	1.62	1.75	1.72	1.68	1.51	1.65	1.58
1.65	1.61	1.70	1.60	1.73	1.61	1.52	1.81	1.72	1.50	1.82	1.65	

   (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.

   (b) ¿Cuántos datos adicionales deben obtenerse para poder construir un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95 pero con una longitud no mayor que 0.05?¿Qué forma tendría este intervalo?

   (c) Encontrar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.

   (d) Encontrar un intervalo de confianza para $\exp(-\mu)$ de nivel 0.95.

4. (a) Probar que si X tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$, entonces $Y = 2\lambda X$ tiene distribución χ_2^2.

   (b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Mostrar que $T = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución χ_{2n}^2.

   (c) En base a b) hallar un intervalo de confianza para λ de nivel $1-\alpha$.

   (d) Se sabe que el tiempo de duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$. Se han probado 20 lámparas y los tiempos de duración de los mismos en días fueron los siguientes

25	45	50	61	39	40	45	47	38	39
54	60	39	46	39	50	42	50	62	50

   Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel 0.99.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $U[0, \theta]$ y sea $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Mostrar que T/θ tiene distribución independiente de θ.

   (b) Usando a) hallar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ de nivel $1-\alpha$.

B) Intervalos de confianza para dos muestras.

6. Se desea comparar los rendimientos de dos variedades de trigo A y B. Se han cultivado 15 parcelas elegidas al azar con la variedad A y 20 con la variedad B, obteniéndose los siguientes rendimientos por hectárea:

Var. A:	250	252	245	258	240	247	251	249	250	243	247	260	238	241	239
Var. B:	330	335	327	329	320	332	337	328	334	326	331	332	328	329	337
	341	336	338	325	321										

Se supone que los rendimientos de la variedad A tienen distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ y los de la otra variedad $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.

(a) Hallar un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de nivel 0.99.

(b) ¿Qué le sugeriría el hecho de que el 0 no pertenezca al intervalo hallado? ¿Qué pensaría en caso contrario?

(c) Hallar un intervalo de confianza para σ^2 de nivel 0.99.

(d) Hallar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.

7. Sea $X_1, \ldots, X_{n_1}$ una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$; las muestras son independientes entre sí. Llamemos s_1^2 y s_2^2 a las varianzas muestrales respectivas.

(a) Probar que

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}.$$

(b) Deducir un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 de nivel $1-\alpha$.

(c) ¿Que podría deducir si 1 no pertenece a este intervalo?¿Y en caso contrario?

8. Se tienen dos variedades de trigo A y B. Se eligen al azar 15 parcelas, y cada una de ellas se divide en dos partes iguales. En una parte se cultiva la variedad A y en la otra la B. Se obtienen así 15 pares de datos:

Parcela:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Var. A:	41	37	36	39	44	42	38	37	35	32	39	30	40	41	37
Var. B:	39	35.3	33.5	36	42.5	38	36	34.8	33.2	29	29	36.6	28.4	38.5	39

Sea X_i el rendimiento de la variedad A en la parcela i e Y_i el rendimiento de la variedad B en la misma parcela. Se supone que (X_i, Y_i), $1 \leq i \leq 15$, es una muestra de una distribución normal bivariada con parámetros desconocidos. Hallar un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ de nivel 0.95.

C) Intervalos de confianza con nivel asintótico.

9. (a) Dada una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, p)$, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$.

(b) Una droga cura cierta enfermedad con probabilidad p. En una prueba con 100 enfermos, se curaron 30.

i. Hallar un intervalo de confianza para p de nivel asintótico 0.95.

ii. ¿Qué tamaño de muestra debería tomarse si se desea una longitud menor que 0.1?

10. (a) Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel asintótico $1-\alpha$.

    (b) El número de llamadas diarias a una central telefónica sigue un proceso de Poisson con media λ. Se ha registrado el número de llamadas durante 20 días, obteniéndose los siguientes valores:

35	41	38	40	34	36	41	48	42	46
39	37	41	35	37	38	42	43	44	67

    Hallar un intervalos de confianza para λ de nivel asintótico 0.90.

11. (a) Supóngase que $X_1, \dots, X_{n_1}$ es una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ es una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, independiente de la anterior. Mostrar que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

    cuando $n_1 \to \infty$ y $n_2 \to \infty$ de modo que $n_1/n_2 \to \lambda$ constante.

    (b) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $(1-\alpha)$ para $\mu_1 - \mu_2$.

D) Ejercicios para hacer en la computadora.

1. Realizar el siguiente estudio de simulación. Generar una muestra aleatoria de variables $X_i \sim Bi(n,p)$ con $(1 \leq i \leq k)$. Para cada variable aleatoria X_i construir los tres intervalos de confianza para p de nivel (asintótico o exacto según corresponda) 0.95 vistos en clase. De este modo se consiguen k intervalos de confianza, construídos a través del método 1, k a través del método 2 y k a través del método 3.

    - Método 1: de nivel asintótico cuando se sustituye el valor de p en la varianza por $\bar{X}$.
    - Método 2: de nivel asintótico cuando no se sustituye a p y se calcula los extremos del intervalo como raíces de una cuadrática.
    - Método 3: de nivel exacto.

    Tomar $k = 2000$ y los siguientes valores de n y p.

    - $n = 20; 50; 100.$
    - $p = 0.10; 0.50.$

    Para cada muestra X_i guardar los siguientes resultados : el intervalo de confianza obtenido, la longitud de dicho intervalo, un 1 si el IC hallado contiene al verdadero valor de p y un 0 en caso contrario.

    Para cada combinación de n y p:

    (a) Estimar la longitud esperada para ambos métodos.

    (b) Estimar la probabilidad de cobertura para ambos métodos.

    (c) Sacar conclusiones.