Geometría Diferencial - Práctica I

1. **Coordenadas polares, esféricas y cilíndricas.**

   (a) Sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Consideremos la carta (U, φ), donde U es M menos una semirrecta L, y $\varphi(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$, donde $r(x,y)$ es la distancia del punto (x,y) al origen, y $\theta(x,y)$ es el ángulo desde L a la semirrecta que pasa por el origen y por (x,y). Probar que si se varía la semirrecta, las cartas obtenidas son compatibles y que con dos de ellas se cubre todo M. Probar además que la estructura diferenciable de M coincide con la usual.

   (b) Hacer lo mismo con $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, usando coordenadas esféricas.

   (c) Hacer lo mismo con $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ usando coordenadas cilíndricas.

2. **Esferas.**

   Consideremos la esfera $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

   (a) Considerar las cartas (U_N, φ_N) y (U_S, φ_S) donde $U_N = S^n \setminus \{(1,0,0,\dots,0)\}$ y $U_S = S^n \setminus \{(-1,0,0,\dots,0)\}$, y φ_N y φ_S son las proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur respectivamente. Probar que inducen una estructura de variedad diferenciable en S^n.

   (b) Consideremos los conjuntos $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$ y las funciones $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \{(y_1, \dots, y_n) \in R^n : \; -1 < y_j < 1 \; \forall j\}$, $\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Probar que también definen una estructura de variedad diferenciable en S^n.

   (c) Defina una estructura de variedad diferenciable en S^n generalizando la idea de tomar ángulo respecto a una semirrecta.

   Probar además que los tres atlas son equivalentes.

3. **Espacio proyectivo real.**

   Consideremos en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$ la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y sea M el conjunto de clases de equivalencia. Notemos con $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ la clase de equivalencia de un punto $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Sean $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in M : x_i \neq 0\}$ y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, definidas por

   $$\varphi_i(x_0 : \dots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

   Probar que las cartas (U_i, φ_i) definen en M una estructura de variedad diferenciable de dimensión n. Esta variedad se llama el espacio proyectivo real de dimensión n, y lo notamos $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

4. **Variedades dadas de forma implícita.**

   Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$, y sea $M = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = a, \text{ y } D_pF \neq 0\}$. Los siguientes casos son ejemplos de esta construcción:

   (a) $F : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, la ecuación de una cuádrica (cónica) sin puntos singulares, $a = 0$.

   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y^2 - P(x)$, P un polinomio de grado d, $a = 0$.

Usar el teorema de la función implícita para construir atlas de M (en el caso general, o sólo para (a) o (b)).

5. Considerar en $\mathbb{R}$ las siguientes cartas:

   (a) $(\mathbb{R}, id)$,

   (b) $(\mathbb{R}, \varphi)$, $\varphi(x) = x^3$.

   Probar que las dos cartas no son compatibles, pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.