Segundo Cuatrimestre 2001

Geometría Diferencial - Práctica II

1. Sean M, N, X tres variedades diferenciables y p_1, p_2 las proyecciones de $M \times N$ sobre M y N respectivamente. Verificar que p_1 y p_2 son funciones diferenciables, y que dada $f : X \to M \times N$, se tiene que f es diferenciable si y solo si $p_1 \circ f$ y $p_2 \circ f$ lo son.

2. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado d si se verifica que $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

   (a) Sean $f, g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, homogéneas del mismo grado. Probar que si $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, podemos definir una función diferenciable $\frac{f}{g} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por la fórmula
   $$\frac{f}{g}(x_0 : \cdots : x_n) = f(x_0, \ldots, x_n)/g(x_0, \ldots, x_n).$$

   (b) Sean $f_0, \ldots, f_m : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables homogéneas de grado d, sin ceros no nulos en común. Entonces la aplicación $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ definida por $f(x_0 : \cdots : x_n) = (f_0(x_0, \ldots, x_n) : \cdots : f_m(x_0, \ldots, x_n))$ es diferenciable.

3. (a) Probar que la función $F : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$, definida por $F(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_n)$ es diferenciable.

   (b) Encontrar un difeomorfismo entre S^1 y $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$.

4. **Espacio proyectivo complejo.**

   Consideremos en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ la siguiente relación de equivalencia: $z \sim w$ si y solo si $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y sea M el conjunto de clases de equivalencia. Notemos con $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$ la clase de equivalencia de un punto $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Sean $U_i = \{(z_0 : \cdots : z_n) \in M : z_i \neq 0\}$ y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, definidas por
   $$\varphi_i(z_0 : \cdots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$
   Probar que las cartas (U_i, φ_i) definen en M una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ y una estructura de variedad holomorfa de dimensión n. Esta variedad se llama el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja n, y lo notamos $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

   (a) Probar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es difeomorfo a la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

   (b) Sean $f_0, \ldots, f_m : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas homogéneas de grado d, sin ceros no nulos en común. Entonces la aplicación $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ definida por $f(z_0 : \cdots : z_n) = (f_0(z_0, \ldots, z_n) : \cdots : f_m(z_0, \ldots, z_n))$ es holomorfa.

5. (a) Sean X, Y dos abiertos convexos de $\mathbb{R}^2$, con la estructura de variedad diferencial inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. ¿Son X e Y difeomorfos?

   (b) Pensando $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, los abiertos convexos X, Y anteriores tienen estructura de variedad holomorfa. ¿Son isomorfos ?

   (c) Sea $X_{r,R} = \{z \in \mathbb{C}/r < |z| < R\}$ (con $0 < r < R$). Siendo un abierto de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, este conjunto tiene estructura de variedad diferencial y de variedad holomorfa. Demostrar:

i. $X_{r,R}$, $X_{s,S}$ son difeomorfos para todo r, R, s, S.

ii. $X_{r,R}$, $X_{s,S}$ son isomorfos si y solo si $R/r = S/s$.

6. Sea M el ocho. Esto es M es la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, y una carta de M es $(M, \varphi = f^{-1})$. Probar que la función $F : M \to M$, definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.

7. **Acciones propias y discontinuas de un grupo.** Sea G un grupo. Una acción de G en M es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \dot{\to} & M \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

que verifica:

(a) $e \cdot x = x$ para todo $x \in M$ ($e \in G$ es el elemento neutro)

(b) $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$ para todo $g, h \in G$, $x \in X$.
Pedimos además que para cada $g \in G$ la aplicación $M \to M$ definida por $x \mapsto g \cdot x$ es diferenciable (y por lo tanto un difeomorfismo, ya que $x \mapsto g^{-1} \cdot x$ es su inversa).

Decimos que G actúa propia y discontinuamente en M si además se verifican:

(c) Si $g \cdot x = x$ para todo $x \in M$, entonces $g = e$.

(d) Para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subseteq M$, $x \in U$ tal que para todo $g \in G$, $U \cap g \cdot U = \emptyset$ ($g \neq e$).

Sea $X = M/\sim$ el cociente de M por la relación $x \sim y$ si y solo si $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$. Probar que existe una estructura diferenciable en X tal que la proyección al cociente $p : M \to X$ es localmente un difeomorfismo.

(**Sugerencia:** Sea una carta (U, φ) en el atlas de M, podemos suponer que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$; ver que se pueden definir cartas en $p(U)$ via $\psi([x]) = \varphi(x)$, $x \in U$.)

i) Ver que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un ejemplo de esta construcción.

ii) $(\mathbb{Z})^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^n$ por $(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$. Probar que la variedad cociente es difeomorfa a $T^n =_{\text{def}} (S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

iii) $\mathbb{Z}_2$ actúa en T^2 (cf. item anterior) por $1 \cdot (x, y) = (x, y)$, $(-1) \cdot (x, y) = (-x, -y)$ $(x, y \in S^1)$. El cociente K es la botella de Klein.

8. **Pegado de variedades** Sean $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ variedades diferenciables, todas de dimensión n. Sean para $i \neq j$, un abierto $U_{ij} \subseteq X_i$, y consideremos en U_{ij} la estructura de variedad diferenciable heredada de X_i. Supongamos también que para cada $i \neq j$ tenemos un difeomorfismo $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ tal que

(I) para cada $i \neq j$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$,

(II) para cada i, j, k, $\varphi(U_{ij}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, y $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferenciable $(X, \mathcal{A})$, y morfismos $\psi_i : X_i \to X$ para cada i tales que

(A) ψ_i es un difeomorfismo entre X_i y un abierto de X,

(B) los abiertos $\psi_i(X_i)$ cubren X,

(C) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$,

(D) $\psi_i = \psi_j \cap \varphi_{ij}$ en U_{ij}.

(a) Sean $X_1 = X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| < 2\}$ dos cilindros. Sean $U_{12} = \{(x, y, z) \in X_1 : |z| > 1\}$, $U_{21} = \{(x, y, z) \in X_2 : |z| > 1\}$, y $\varphi_{12} : U_{12} \to U_{21}$ definida por

$$\varphi_{12}(x, y, z) = \begin{cases} (x, y, 3 - z) & \text{si} \quad z > 1 \\ (x, y, -3 - z) & \text{si} \quad z < -1 \end{cases}$$

Probar que la variedad que se obtiene pegando X_1 y X_2 con los datos de pegado es difeomorfa al toro.

(b) Describir de manera explícita la construcción de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ como pegado de tres copias de $\mathbb{R}^2$.

9. Sea g un numero natural. Consideramos un disco cerrado $D_0 \subset R^2$ y g discos cerrados disjuntos $D_1, \ldots, D_g$ contenidos en el interior de D_0. Denotemos D_i^0 el interior de D_i y definamos

$$D(g) = D_0 - \bigcup_i D_i^0$$

Sea $X = D(g) \times \{0\} \cup D(g) \times \{1\}$ la unión disjunta de dos copias de $D(g)$. Sea $S(g)$ el conjunto cociente de X por la relación de equivalencia generada por $(x, 0) \sim (x, 1)$ si x pertenece al borde de alguno de los D_i.

(a) Definir en $S(g)$ un atlas diferenciable tal que los abiertos $D(g)^0 \times \{0\}$ y $D(g)^0 \times \{1\}$ sean entornos coordenados.

(b) Demostrar que si modificamos los radios y posición de los discos D_i obtenemos una variedad difeomorfa.

10. Sea g un numero natural. Sea $P_g \subset R^2$ un poligono regular con $4g$ lados denotados $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_g, b_g, c_g, d_g$ consecutivamente al recorrer el borde de P_g, digamos en sentido anti-horario. Vamos a definir una relación de equivalencia $\sim$ en P_g cuyo efecto será identificar cada a_i con c_i y b_i con d_i de una manera específica. Precisamente, $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim y$ si $x \in a_i, y \in c_i, d(x, a_i \cap d_i) = d(y, c_i \cap d_i)$ o bien $x \in b_i, y \in d_i, d(x, a_i \cap b_i) = d(y, a_i \cap d_i)$ donde d denota distancia en R^2 (¡hacer un dibujo!).

Denotamos $S'(g) = P_g/\sim$ y $\pi : P_g \to S'(g)$ la proyección al cociente.

(a) Definir un atlas diferenciable en $S'(g)$ tal que $\pi^{-1} : \pi(P_g^0) \to P_g^0$ sea una carta, donde P_g^0 denota el interior de P_g.

(b) Demostrar que $S(g)$ (ejercicio anterior) y $S'(g)$ son difeomorfas.