Geometría Diferencial - Práctica III

Notación. Dada X una variedad diferenciable, $x \in X$, (U, φ) una carta alrededor de x, $f : V \to \mathbb{R}$ una función diferenciable ($x \in V$), y $v \in T(x)$ un vector tangente a X en x adoptamos la siguiente notación (o abuso de notación):

- $v(f) = v((V, f)) = v(f_x)$ es el valor de la derivavión v en el germen dado por la clase de equivalencia del par (V, f)
- $\dfrac{\partial}{\partial \varphi_i} = \left.\dfrac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x$ es la derivación dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (f_x) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial r_i}$$

  donde $(r_1, \ldots, r_n)$ son las coordenadas en $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. Sea $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable usual; verificar que se puede identificar a $T\mathbb{R}^n(x)$ con $\mathbb{R}^n$.

2. Sea X una variedad diferenciable, $\alpha : I \to X$ y una curva diferenciable en X tal que $\alpha(0) = x$ Demostrar que la aplicación $\alpha'(0)$ definida como $\dot{\alpha}(0)\,(f_x) = (f \circ \alpha)'(0)$, define un vector tangente a X en x (f_x la clase de equivalencia de un par (V, f), $x \in V$).

3. Sea X una variedad diferenciable, $x \in X$ y (U, φ) una carta alrededor de x. Si $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, calcular
$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (\varphi_j).$$

4. Sea $X = S^2$ con el atlas dado por las dos proyecciones estereográficas, φ, ψ. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la restricción a X de la aplicación $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2 x_3$. Calcular
$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (f_x) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial \psi_i}\right|_x (f_x). \qquad i = 1, 2$$

5. Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la función diferenciable definida por las aplicaciones $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por $F_i(x_0, x_1, x_2) = x_i^2$, $i = 0, 1, 2$ (cf. práctica II, ej.2 (b)). Si $x \in \mathbb{P}^2$ y (U, φ) es una de las cartas usuales de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ alrededor de x, y (V, ψ) una alrededor de $f(x)$, calcular
$$df(x) : T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))(x) \to T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))(f(x)),$$
en particular, ¿cuánto vale
$$df(x)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right) \qquad \text{y} \qquad df(x)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} - 2\frac{\partial}{\partial \varphi_2}\right)?$$

6. Sean X una variedad diferenciable y $v \in TM(x)$ un vector tangente a X en x. Probar que existe una curva α en X tal que $\alpha(0) = x$, y $\dot{\alpha}(0) = v$ (cf. ejercicio 2).

7. Sean X y Y variedades diferenciables, $x \in X$, $y \in Y$. Demostrar que
$$TM(x) \times TN(y) \simeq T(M \times N)((x, y)).$$