Geometría Diferencial - Práctica V

1. Sea C el cilindro $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ y sea F el campo vectorial definido por $V(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3)$ (con el abuso de notación explicado en clase). Encontrar las coordenadas locales de F respecto a una carta (U, φ) que verifica $\varphi^{-1}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$.

2. Probar que $\Gamma(TX)$ es una módulo sobre el anillo de funciones diferenciables $C^\infty(X)$.

3. Sean $F, G, H \in \Gamma(TX)$ tres campos diferenciables. Definamos para cada $x \in X$ una función $[F, G]_x : D(x) \to \mathbb{R}$ por $[F, G]_x(f) = F_x(G(f)) - G_x(F(f))$ (para un germen (U, f), $F(f)$ es la función diferenciable $F(f)(y) = F_y(f)$, con F_y el valor del campo en y).

   Probar que

   (a) $[F, G]_x$ es una derivación, por lo que $[F, G]$ es una campo de vectores tangentes.
   (b) $[F, G]$ es un campo diferenciable.
   (c) $[F, G] = -[G, F]$
   (d) $[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0$

4. Sea X una variedad y (U, φ) una carta. Probar que

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right] = 0$$

5. Sean F, G dos campos diferenciables, y sea (U, φ) una carta. Si en U se tiene

$$F = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \qquad \text{y} \qquad G = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i},$$

   entonces para $[F, G]$ se tiene

$$[F, G] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial \varphi_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial \varphi_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$$