Geometría Diferencial - Práctica VI

1. **Operadores de contracción.**

   (a) Probar que para cada par de valores i, j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ existe una aplicación
   $$c^i_j : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$$
   que en los tensores elementales vale
   $$c^i_j(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q) = \varphi_j(v_i) v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v_i} \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi_j} \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

   (b) Mas generalmente si $I = (i_1, \ldots, i_n)$ y $J = (j_1, \ldots, j_n)$ son dos sucesiones de n índices distintos de $\{1, \ldots, p\}$ y $\{1, \ldots, q\}$ respectivamente, existe una contracción
   $$c^I_J : T^{p,q}(V) \to T^{p-n,q-n}(V)$$
   que en un tensor elemental $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q$ vale
   $$\prod_{\alpha=1}^{n} \varphi_{j_\alpha}(v_{i_\alpha}) v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \hat{v_{i_2}} \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

   (c) Si $p = q = n$ y $I = J = (1, \ldots, n)$, la contracción de (b) permite identificar $(V^*)^{\otimes n}$ con $(V^{\otimes n})^*$.

   (d) Sea $\alpha : V \otimes V^* \to \mathrm{Hom}_K(V, V)$ definida en tensores elementales por $\alpha(v \otimes \varphi)(u) = \varphi(u)v$. Sea $c^1_1 : V \otimes V^* \to K$ el operador de contracción, y sea $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}_K(V, V) \to K$ el operador traza. Probar que $\mathrm{tr} \circ \alpha = c^1_1$.

2. **Realización de $\wedge^n V$ y $S^n V$ como subespacios de $T^n V$.**

   Si la característica de K es cero, podemos definir las aplicaciones
   $$\mathcal{A} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$$
   por
   $$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} sg(\sigma) t \cdot \sigma \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} t \cdot \sigma$$
   Probar

   (a) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$.

   (b) La imagen de $\mathcal{A}$ es el conjunto de tensores antisimétricos, y la imagen de $\mathcal{S}$ el conjunto de tensores simétricos.

   (c) La restricción de $\pi : V^{\otimes n} \to S^n V$ a $\mathrm{im}\, \mathcal{S}$ es un isomorfismo entre $\mathrm{im}\, \mathcal{S}$ y $S^n V$. Similarmente, dar un isomorfismo entre $\mathrm{im}\, \mathcal{A}$ y $\wedge^n V$.

3. **El dual de $\wedge^n V$.** Probar que la aplicación bilineal simétrica
   $$\wedge^n(V^*) \times \wedge^n V \to K$$
   definida por
   $$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} sg(\sigma) \varphi_{\sigma(1)}(v_1) \ldots \varphi_{\sigma(n)}(v_n) = \det(\varphi_j(v_i))$$
   induce un isomorfismo entre $\wedge^n(V^*)$ y $(\wedge^n V)^*$.

4. Sea $f : V \to U$ una transformación lineal, y sean $\{v_1, \ldots, v_r\}$ y $\{u_1, \ldots, u_s\}$ bases de V y U respectivamente. Encontrar las matrices de $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to U^{\otimes n}$, $S^n f : S^n V \to S^n U$ y $\wedge^n f : \wedge^n V \to \wedge^n U$ en las bases inducidas por $\{v_1, \ldots, v_r\}$ y $\{u_1, \ldots, u_s\}$.

5. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Probar que

$$\det(t.\operatorname{id}_V + f) = \sum_{j=0}^{n} \operatorname{tr}(\wedge^j f).t^{n-j}$$

6. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y $B' = \{u_1, \ldots, u_r\}$ dos bases de V. Sea $C = C_{BB'}$ la matriz de cambio de base (que toma las coordenadas de un vector en base B y devuelve las coordenadas del mismo vector en la base B').

   Describir la matriz de cambio de base para $V^{\otimes n}, S^n V, \wedge^n V$.

   Sean además $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ y $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ las bases duales de B y B' respectivamente. Calcular la matriz de cambio de base para $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$.

7. Exhibir isomorfismos

$$S^n(U \oplus V) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} S^i(U) \otimes S^{n-i}(V) \qquad \text{y} \qquad \wedge^n (U \oplus V) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \wedge^i(U) \otimes \wedge^{n-i}(V)$$