

Geometría Diferencial - Práctica VII

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $\alpha \in \Gamma((T^*Y)^{\otimes r})$ un campo de de covectores de grado r , al que identificamos con un campo de aplicaciones multilineales $TY(y) \times \cdots \times TY(y) \rightarrow \mathbb{R}$.

Probar que f induce un campo de covectores de grado r , $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*X)^{\otimes r})$, que vía la identificación anterior se define por

$$f^*(\alpha)(x)(v_1, \dots, v_r) = \alpha(f(x))(df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_r)).$$

Si (U, φ) es una carta de X alrededor de x , (V, ψ) es una carta de Y alrededor de $y = f(x)$, $f(U) \subseteq V$ y α se escribe localmente como

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} a_{i_1, \dots, i_r}(x) d\psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\psi_{i_r},$$

encontrar las coordenadas de $f^*(\alpha)$ en la base $d\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi_{i_r}$. (Hacer primero los casos $r = 1, 2$)

Además, si α es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos) $f^*(\alpha)$ también lo es.

2. Sea X una variedad diferenciable y ω una 1-forma. Supongamos que (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas tales que $\omega|_U = \sum \omega_i d\varphi_i$ y $\omega|_V = \sum \omega'_i d\psi_i$. ¿Qué relación hay entre ω_i y ω'_i en $U \cap V$?
3. Escribir las condiciones de compatibilidad para tensores de tipo $S^2(TX^*)$.
4. Sea ω una k -forma diferenciable ¿Es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$?
5. Sea X una variedad diferenciable, (U, φ) una carta y $\omega \in \Omega^p(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, φ) para los casos $0 \leq p \leq 2$.
6. Sea $\omega \in \Omega^p(X)$. Probar que:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

7. Operadores vectoriales clásicos.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Demostrar:

- (a) $\omega_F^1(x)(v) = \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en \mathbb{R}^3 . Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en \mathbb{R}^3 , ω determina un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^1 = \omega$.
- (b) $\omega_F^2(x)(u, v) = \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en \mathbb{R}^3 . Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente toda 2-forma ω define un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^2 = \omega$.
- (c) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. ¿Qué relación hay entre
 - i. df y ∇f ,
 - ii. $\text{rot } F$ y $d\omega_F^1$,
 - iii. $\text{div } F$ y ω_F^2 ?

Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$ las fórmulas clásicas $\text{rot } \nabla \cong 0$ y $\text{div rot} \cong 0$.

8. Describir una n -forma en la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ distinta de cero en todo punto.
9. Sea X una variedad, TX el fibrado tangente de X . Para cada carta (U, φ) en X consideremos la usual de TX , $(\pi^{-1}(U), \varphi \times \psi)$ (donde $\pi : TX \rightarrow X$ es la proyección en la primer coordenada). Demostrar que $\omega = \sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge d\psi_i$ define una 2-forma en TX (vale decir, se verifican las condiciones de compatibilidad). Se dice que ω es la 2-forma canónica de TX . (cf., Arnold.)
10. Sean X e Y variedades diferenciables y $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable. Verificar que f induce una aplicación $f^* : \Omega^p(Y) \rightarrow \Omega^p(X)$. Supongamos que X e Y son abiertos de \mathbb{R}^n , calcular $f^*(dx_i)$.

Probar:

- (a) f^* es lineal
- (b) $f^*(g.\omega) = g \circ f.\omega$, para $g \in C^\infty(N)$
- (c) $f^*(\omega \wedge \omega') = f^*(\omega) \wedge f^*(\omega')$
11. Sea X una variedad diferenciable, y sea $\omega \in \Omega^p(X)$. Diremos que ω es una p -forma cerrada si $d\omega = 0$, y diremos que ω es una p -forma exacta si existe $\omega' \in \Omega^{p-1}(X)$ tal que $d\omega' = \omega$.

Probar que:

- (a) Toda forma exacta es cerrada
- (b) Si ω, ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta
- (c) $f^* \circ d = d \circ f^*$
- (d) Si $f : X \rightarrow Y$ es diferenciable, entonces f^* transforma formas exactas en exactas y cerradas en cerradas.
12. Sea $V \in \Gamma(TX)$ un campo diferenciable. Definamos la función $i_V : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p-1}(X)$ como

$$i_V(\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(x)(V(x), v_1, \dots, v_{p-1}),$$

donde vemos a ω como un campo de aplicaciones multilineales alternadas.

Para 0-formas definimos $i_V(f) = 0$.

Sea (U, φ) una carta alrededor de x , sea la escritura local de V ,

$$V = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

y sea la escritura local de ω

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} b_{i_1, \dots, i_p} d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}.$$

Escribir en coordenadas locales $i_V(\omega)$.