Práctica 2

1. Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión $n \geqslant 1$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base. Sea $x : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $x(\sum_{i=1}^n a^i.v_i) = (a^1, \ldots, a^n)$; i.e., si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ entonces $\{x^1, \ldots, x^n\}$ es la base dual de B. Consideremos sobre V la única topología que hace de x un homeomorfismo.

a) Verificar que dicha topología no depende de B.

b) Sea $\mathcal{D}$ la estructura diferenciable generada por el atlas (V, x). Probar que $\mathcal{D}$ no depende de B.

NOMBRE: $\mathcal{D}$ se denomina ***estructura diferenciable usual*** para V.

2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $A \subset M$ un abierto no vacío.

a) Considerando en A la topología inducida por M, mostrar que A hereda –de manera natural– una estructura diferenciable que hace de A una variedad diferenciable de dimensión m.

b) Deducir de los ejercicios anteriores que $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ resulta –de manera natural– una variedad diferenciable de dimensión n^2.

3. Sea Q una cuádrica sin puntos singulares. Verificar que Q es una subvariedad de dimensión $n - 1$.

4. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión m y sea $\mathcal{D}$ su estructura diferenciable. Si $\mathcal{D}'$ es una estructura diferenciable que hace de M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, probar que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Sug.: utilizar la carta dada por la definición de subvariedad.

5. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad.

a) Probar que la topología de M coincide con la inducida por $\mathbb{R}^n$.

b) Si $\dim(M) = n$, mostrar que M es abierto y que la estructura diferenciable coincide con la heredada de $\mathbb{R}^n$.

Sug.: ejercicio 2a).

6. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su estructura diferenciable.

a) Sean $V \subset M$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos e $y : V \longrightarrow A$ un homeomorfismo. Suponiendo que para cada $p \in V$ existe una carta $(U, x) \in \mathcal{D}$ alrededor de p tal que $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \longrightarrow x(U \cap V)$ es un difeomorfismo, probar que $(V, y) \in \mathcal{D}$.

b) Sean $(U,x) \in \mathcal{D}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto e $y : U \longrightarrow A$ una biyección tal que las funciones

$$y \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow A \qquad \text{y} \qquad x \circ y^{-1} : A \longrightarrow x(U)$$

son diferenciables. Deducir de a) que $(U,y) \in \mathcal{D}$.

c) Dado $p \in M$,

(i) probar que existe $(U,x) \in \mathcal{D}$ con $x(p) = 0$.

(ii) sea $B(0,r)$ la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen y radio $r > 0$. Construir $(U,x) \in \mathcal{D}$ tal que $x(p) = 0$ y $x(U) = B(0,r)$.

(iii) construir una carta $(U,x) \in \mathcal{D}$ con $x(p) = 0$ y $x(U) = \mathbb{R}^n$.
Sug.: considerar la función $f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(u) = \frac{u}{1-\|u\|^2}$, donde $\| \ \|$ denota la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$.

7. Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ un abierto no vacío y $f = (f^1, \ldots, f^n) : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, que satisface las siguientes propiedades:

1. *Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(A) = \Omega \cap M$.*
2. *$f : A \longrightarrow \Omega \cap M$ es homeomorfismo, siendo la topología de $\Omega \cap M$ la inducida por $\mathbb{R}^n$ o, equivalentemente, la de M.*
3. *Para todo $u \in A$ es $\operatorname{rg}(D_j f^i|_u) = m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Probar que $(\Omega \cap M, f^{-1})$ es una carta admisible.

Sug.: para cada $p \in V$, considerar la carta (U,x) con $p \in U$ inducida por cartas usuales (W,φ) de $\mathbb{R}^n$ adaptadas a M y aplicar el ejercicio 6a).

8. Sean M , N variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable. Probar:

a) El concepto de diferenciabilidad de una función f no depende de las cartas (U,x) y (V,y) que satisfacen $f(U) \subset V$.

b) f es contínua.

c) Si A es un abierto no vacío de M con la estructura diferenciable heredada de M, entonces la inclusión $i : A \longrightarrow M$ es diferenciable.

d) Si Q es otra variedad diferenciable y $g : N \longrightarrow Q$ es diferenciable, entonces $g \circ f : M \longrightarrow Q$ también lo es.

e) Si A es un abierto no vacío de M, la restricción de f a A es diferenciable.

9. Construir una variedad diferenciable M de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$ tal que la inclusión $i : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sea contínua pero no diferenciable.

10. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $U \subset M$ un abierto no vacío. Verificar:

a) $f \in \mathcal{F}(M) \quad \Longrightarrow \quad f|_U \in \mathcal{F}(U)$

b) $f, g \in \mathcal{F}(U) \quad \Longrightarrow \quad f.g \in \mathcal{F}(U)$

c) $\mathcal{F}(U)$ –con las operaciones naturales– es un $\mathbb{R}$−espacio vectorial

d) $x^i \in \mathcal{F}(M)$ para toda carta (U, x), siendo $x = (x^1, \dots, x^n)$.

11. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Considerando a U y $x(U)$ como variedades diferenciables con las estructuras inducidas por M y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, verificar que $x : U \longrightarrow x(U)$ es un difeomorfismo.

12. Sea $f = (f^1, \dots, f^k) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $n > k$, una función diferenciable y $b \in f(\mathbb{R}^n)$ un valor regular. Sea $M = f^{-1}(b)$ dotada de la única estructura diferenciable que la hace una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - k$. Verificar que

$$T_pM = \{u \in \mathbb{R}^n \ / \ < \mathrm{grad}(f^j)|_p, u >= 0 \ , \ 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

13. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $p, q \in M$ puntos distintos. Verificar que $M_p \cap M_q = \varnothing$.

14. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de M_p. Construir una carta (U, x) de M alrededor de p tal que $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = v_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Sug.: ejercicio 6c).

15. Sea V un $\mathbb{R}$−espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Considerando a V como una variedad diferenciable con la estructura usual (cf. ejercicio 1), sea (V, x) la carta inducida por B. Para $u \in V$, se define el isomorfismo $J_u : V \longrightarrow V_u$ por

$$J_u\left(\sum_{i=1}^{n} a^i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_u$$

Mostrar que J_u no depende de la base B; i.e., es canónico.

16. FIBRADO TANGENTE

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigcup\limits_{p\in M} M_p$, i.e., la unión de todos los espacios tangentes. Sea $\pi : TM \longrightarrow M$ definida por $\pi(v) = p$ si $v \in M_p$.

Para cada $(U, x) \in \mathcal{D}$, sea $TU = \bigcup\limits_{p\in U} M_p \subset TM$ y $\bar{x} : TU \longrightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ la aplicación definida por

$$\bar{x}(v) = (x(\pi(v)) \ , \ v(x^1), \dots, v(x^n))$$

o, equivalentemente,

$$\bar{x}\left(\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p) \ , \ v(x^1), \dots, v(x^n))$$

para cada $p \in U$ y $v \in M_p$.

Denotando con $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^{2n})$, será

$$\bar{x}^i(v) = x^i(\pi(v)) = x^i \circ \pi(v) \qquad \text{y} \qquad \bar{x}^{n+i}(v) = v(x^i)$$

para $1 \leqslant i \leqslant n$. Verificar:

a) $\bar{x} : TU \longrightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa $\bar{x}^{-1} : x(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU$ definida por $\bar{x}^{-1}(a, b^1, \ldots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^{-1}(a)}$ para cada $a \in x(U)$.

b) Si $(V, y) \in \mathcal{D}$ y $U \cap V \neq \varnothing$, entonces $\bar{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$.

c) En la situación de b), la biyección $\bar{x} \circ \bar{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}(a, b) = \left(x \circ y^{-1}(a) \ , \ \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial(x^1 \circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial(x^n \circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a \right)$$

Concluir que es diferenciable.

d) Utilizando el criterio para construir variedades diferenciables, deducir que TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$ para la cual las cartas $(TU, \bar{x})$ resultan admisibles.

e) Con dicha estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \longrightarrow M$ resulta diferenciable.

17. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que la aplicación $df : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

18. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Dado $p \in U$, sea $a = x(p)$. Probar que $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow M_p$ satisface $(x^{-1})_{*a}(D_i|_a) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

19. Sean M , N varidades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$. Probar que:

a) si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$

b) si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

20. Calcular f_{*p} para

a) $f : M \times N \longrightarrow M$, $f = \pi_1$

b) $f : M \times N \longrightarrow N$, $f = \pi_2$

c) $f : S^n \longrightarrow S^n_\rho$, $f(u) = \rho.u$

d) $f : E \longrightarrow F$, transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

21. Considerando a cada una de las variedades con la estructura diferenciable anteriormente definida sobre ella, probar que las inclusiones siguientes son diferenciables:

a) $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

b) $i : S \longrightarrow E$, S subespacio del espacio vectorial E

c) $i : A \longrightarrow M$, M variedad diferenciable, $A \subset M$ abierto

d) $i : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

e) $i : M_p \longrightarrow TM$, M variedad diferenciable, $p \in M$

Analizar en cada caso si son, o no, inmersiones y sumersiones.

22. Probar que todo difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ es sumersión.

23. Sea $c : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (t^2, t^3)$. Mostrar que

a) c es inyectiva

b) c es diferenciable, $\dot{c}(0) = 0$

c) considerando a $M = c(-1, 1)$ con la estructura diferenciable generada por (M, c^{-1}),

(i) $i : M \longrightarrow i(M)$ es homeomorfismo diferenciable

(ii) M no es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^2$.

24. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto, una función diferenciable. Probar que su gráfico: $G_f = \{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in U\}$ es una superficie.

25. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ uan superficie y $p \in S$. Probar que existe un entorno V de p en S tal que V es el gráfico de una función diferenciable que tiene una de las tres formas:

$$z = f(x, y) \qquad\qquad y = g(x, z) \qquad\qquad x = h(y, z)$$

26. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(u, v) = (u^2v + v^2, u - 2v^3, ve^u)$. Hallar la matriz de $f_{*(1,2)}$ y de $g_{*(u,v)}$ y calcular $g_{*(0,1)}\left(4\frac{\partial}{\partial u}\big|_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial v}\big|_{(0,1)}\right)$.

27. **a)** Probar que toda variedad diferenciable es localmente conexa por arcos y que sus componentes conexas son abiertas.

b) Probar que toda variedad diferenciable de dimensión n es localmente compacta.

28. Probar que $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ / \ \det(A) = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n^2 - 1$.

Calcular $SL(n, \mathbb{R})_I$, donde I es la matriz identidad.

29. **a)** Sean X , Y subvariedades de $\mathbb{R}^n$ tales que $X \subset Y$. Probar que X es subvariedad de Y y que para todo $p \in X$ vale:

$$p + T_pX \subset p + T_pY$$

b) Deducir que los conjuntos

$$M : x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad M' : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

no pueden ser subvariedades de $\mathbb{R}^3$.

30. a) Probar que no existe estructura diferenciable sobre la lemniscata que la haga subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

b) Idem para $M = \mathfrak{L} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$, donde $\mathfrak{L}$ es una lemniscata contenida en el plano xy.

31. Sea M una variedad diferenciable de dimesión n. Sean $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección natural y $v \in TM$. Calcular $\pi_{*v}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_v)$, siendo $(TU, \bar{x})$ la carta de v asociada a la carta (U, x) de $\pi(v)$.

32. Sean M , N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, i_q , j_p la inyecciones en $M \times N$ y π_1 , π_2 las proyecciones desde $M \times N$. Calcular:

$$i_{q*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p\right) \quad , \quad j_{p*q}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^\ell}\right|_q\right) \quad , \quad \pi_{1*(p,q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial z^j}\right|_{(p,q)}\right) \quad , \quad \pi_{2*(p,q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial z^j}\right|_{(p,q)}\right)$$

siendo (U, x) una carta en M alrededor de p y (V, y) una carta en N alrededor de q , $(U \times V, z)$ la carta de $M \times N$ alrededor de (p, q) generada por las anteriores y $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m + n$.

33. Sea M una variedad diferenciable y (V, y) una carta en M tal que $y(V) = \mathbb{R}^n$. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo y sea $x = \phi \circ y$. Probar que (V, x) es una carta en M y calcular las componentes de $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial y^j}|_p\}$.

34. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable (en el sentido tradicional).

Probar que también es diferenciable como aplicación entre variedades, si se considera a U y a $\mathbb{R}^n$ con las estructuras diferenciables usuales.

Analizar la relación entre $Df(a)$ y f_{*a} para cada $a \in U$.

35. Sean M , N y P variedades diferenciables y $\phi : M \times N \longrightarrow P$ una función diferenciable. Se definen:

$$\begin{array}{lll} \phi_p : N \longrightarrow P & \text{por} & \phi_p(q) = \phi(p,q) \\ \phi_q : M \longrightarrow P & \text{por} & \phi_q(p) = \phi(p,q) \end{array}$$

Calcular $\phi_{*(p,q)}$ en términos de ϕ_{p*q} y de ϕ_{q*p}.

36. Sea M una variedad compacta de dimensión n y sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Probar que f no puede ser no singular en todo punto.

37. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva. ¿Y si sólo fuese contínua?

38. Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Dada una carta (U, x) de M, sea $f : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $i \circ x^{-1}(u)$. Probar:

a) Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $U = \Omega \cap M$ y $f : x(U) \longrightarrow \Omega \cap M$ es una biyección

b) $f : x(U) \longrightarrow \Omega M$ es un homeomorfismo

c) f es diferenciable

d) $\mathrm{rg}(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}|_a) = m$ para todo $a \in x(U)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Sug.: utilizar el hecho que M tiene la topología inducida, que i es diferenciable y que $i_{*p} : M_p \longrightarrow \mathbb{R}^n_p$ es un monomorfismo para todo $p \in M$.

39. Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de M. Mostrar que $df_a(\mathbb{R}^m) = T_{f(a)}M$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)