Práctica 3

1. CARTA GEOGRAFICA

Sea $S^2_\rho \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio $\rho > 0$ con la estructura diferenciable generada por las proyecciones estereográficas. Sea C el semimeridiano de S^2_ρ de extremos (incluidos) polo norte $N = (0,0,\rho)$ y polo sur $S = (0,0,-\rho)$ que pasa por $O = (\rho,0,0)$.

a) Verificar que $S^2_\rho - C$ es un abierto en S^2_ρ con la topología inducida por $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $f : (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow S^2_\rho - C$ definida por

$$f(\alpha,\theta) = (\rho\cos\alpha\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Mostrar que $(S^2_\rho - C, f^{-1})$ es una carta, i.e., es compatible con la estructura diferenciable de la esfera.

α : longitud — θ : latitud.

2. Sea S^2 la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ con la estructura diferenciable usual y $P_2(\mathbb{R})$ el plano proyectivo real con la estructura diferenciable generada por el atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$, donde

$$U_i = \{L \in P_2(\mathbb{R}) \;/\; L \not\subset Z_i\} \qquad \varphi_i(x) = (\frac{x_j}{x_i}, \frac{x_k}{x_i}) \quad j < k \;,\; j,k \neq i$$

siendo $Z_i : x_i = 0$.

Sea $\pi : S^2 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ la función definida por $\pi(v) = [v]$, i.e., $\pi(v)$ es el subespacio generado por el vector unitario v.

a) Mostrar que π es suryectiva pero no inyectiva

b) Probar que π es diferenciable

c) Deducir que $P_2(\mathbb{R})$ es compacto.

3. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ diferenciable. Sea $A \subset M$ abierto no vacío tal que $f(A)$ es abierto en N. Considerando las estructuras diferenciables heredadas probar que $f : A \longrightarrow f(A)$ es diferenciable.

4. Sea E un espacio vectorial real de dimensión n, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E y (E, x) la carta de E inducida por B. Sea $\pi : TE \longrightarrow E$ la proyección del fibrado tangente y $J : TE \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n$ definida por $J(v) = (\pi(v), v(x^1), \ldots, v(x^n))$. Mostrar que:

a) $J|_{E_u} : E_u \longrightarrow \{u\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo para todo $u \in E$

b) $J : TE \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

5. Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones n y k respectivamente, $M \times N$ la variedad producto, π_1, π_2 las proyecciones e i_q, j_p las inyecciones. Se define $\varphi_{pq} : M_p \times N_q \longrightarrow (M \times N)_{(p,q)}$ por $\varphi_{pq}(u,v) = i_{q*p}(u) + j_{p*q}(v)$.

a) Verificar que $\pi_{1*(p,q)} \circ i_{q*p} = (\mathrm{id}_M)_{*p}$ y $\pi_{2*(p,q)} \circ j_{p*q} = (\mathrm{id}_N)_{*q}$

b) Mostrar que $\pi_{1*(p,q)} \circ j_{p*q} = 0$ y $\pi_{2*(p,q)} \circ i_{q*p} = 0$

c) Interpretar geométricamente la función φ_{pq} y verificar la igualdad

$$\big(\pi_{1*(p,q)} \times \pi_{2*(p,q)}\big) \circ \varphi_{pq} = \mathrm{id}_{M_p \times N_q}$$

d) **Identificación canónica entre** $(M \times N)_{(p,q)}$ y $M_p \times N_q$

Deducir que las aplicaciones lineales $\pi_{1*(p,q)} \times \pi_{2*(p,q)}$ y φ_{pq} son isomorfismos, uno inverso del otro y que por lo tanto vale la igualdad

$$i_{q*p} \circ \pi_{1*(p,q)} \ + \ j_{p*q} \circ \pi_{2*(p,q)} = \mathrm{id}_{(M \times N)_{(p,q)}}$$

e) Deducir que las aplicaciones

$$\pi_1 \times \pi_2 : T(M \times N) \longrightarrow TM \times TN \qquad \varphi : TM \times TN \longrightarrow T(M \times N)$$

dadas por

$$\pi_{1*} \times \pi_{2*}(w) = (\pi_{1*\pi(w)}(w), \pi_{2*\pi(w)}(w)) \qquad \varphi(u,v) = i_{\pi(v)*\pi(u)}(u) + j_{\pi(u)*\pi(v)}(v)$$

para $u \in TM, v \in TN, w \in T(M \times N)$, son una inversa de la otra.

f) **Identificación canónica entre** $T(M \times N)$ y $TM \times TN$

Probar que las aplicaciones definidas en el inciso anterior son diferenciables y en consecuencia difeomorfismos, uno inverso del otro.

6. Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E$ la curva dada por $\alpha(s) = A + s.B + s^2.C$ $(A, B, C \in E)$. Probar que α es diferenciable y verificar que $\dot{\alpha}(0) = J_A(B)$.

7. Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $a > r > 0$ y $T \subset \mathbb{R}^3$ definido por

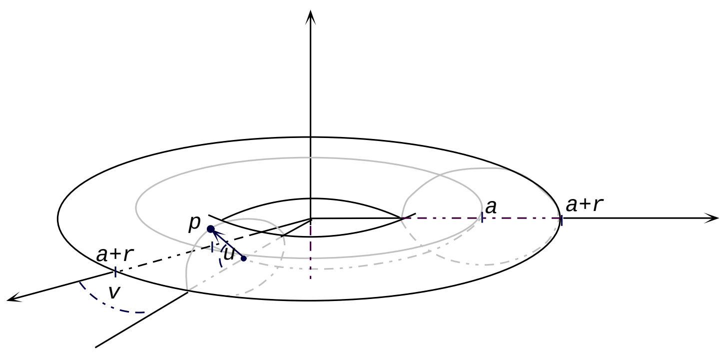
$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_3^2 = r^2 - (\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} - a)^2\}$$

Probar que T es una superficie (llamada ***toro***).

8. Sean $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\,\mathrm{sen}\, v, r\,\mathrm{sen}\, u)$$

donde $a > r > 0$. Probar que f es una parametrización del toro definido en el ejercicio anterior.



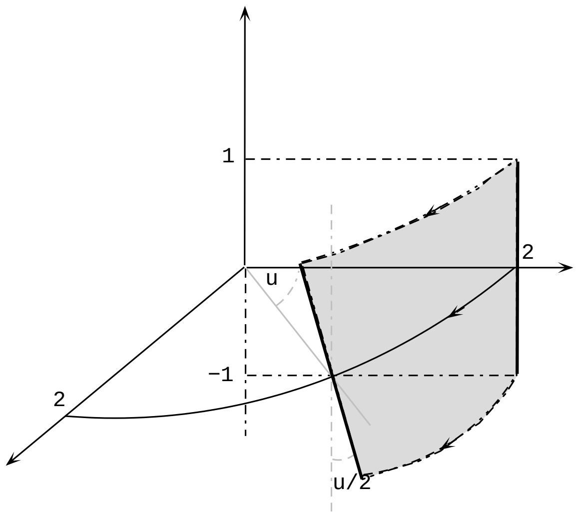
p=((a+r.cos(u))cos(v),(a+r.cos(u))sen(v),r.sen(v))

9. Sean $A = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f_1 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$f_1(u,v) = \big((2 - v \operatorname{sen} \tfrac{u}{2}) \operatorname{sen} u, (2 - v \operatorname{sen} \tfrac{u}{2}) \cos u, v \cos \tfrac{u}{2}\big)$$

$$f_2(u,v) = \big((2 - v \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2})) \operatorname{sen} u, (2 - v \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2})) \cos u, v \cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2})\big)$$

Probar que $M = f_1(A) \cup f_2(A)$ es una superficie (llamada ***cinta de Möbius***).



10. Sea $c : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular definida por $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, con $c_1(t) > 0$ y $\dot{c}_2(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Sea $f : [0, 2\pi) \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u,t) = (c_1(t) \cos u), c_1(t) \operatorname{sen} u, c_2(t)$$

a) Probar que $M = f([0, 2\pi) \times (a, b))$ es una superficie (llamada ***superficie de revolución***).

b) Si $A = (0, 2\pi) \times (a, b)$, probar que $f|_A : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de M.

11. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) M es paralelizable

b) TM es trivial

12. Verificar que son grupos de Lie

a) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\cdot$ = producto usual en $\mathbb{C}$

b) $(S^1, \cdot)$, $\cdot$ = producto usual en $\mathbb{C}$

c) $(G \times H, P)$, G, H grupos de Lie , $P((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$

d) $T_S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ / \ A$ es triangular superior $\}$, con el producto usual de matrices.

e) $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$, donde $(s_1, t_1) \cdot (s_2, t_2) = (s_1 s_2, s_1 t_2 + t_1)$ (grupo de los movimientos afines del plano).

f) $(GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \cdot)$, donde $(A_1, v_1) \cdot (A_2, v_2) = (A_1 A_2, A_1 v_2 + v_1)$ (grupo de los movimientos afines de $\mathbb{R}^n$).

13. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $e \in G$ el elemento unidad. Para cada $h \in G$ se define $L_h : G \longrightarrow G$ por $L_h(g) = h.g$.

a) Verificar que L_h es diferenciable para todo $h \in G$. En particular, $L_e = \mathrm{id}_G$.

b) Verificar que L_h es una biyección con inversa $L_h^{-1} = L_{h^{-1}}$.

c) Deducir de los incisos anteriores que L_h es un difeomorfismo para todo $h \in G$.

d) Probar que $L_{h_1 h_2} = L_{h_1} \circ L_{h_2}$ para todo $h_1, h_2 \in G$.

e) Dado $v \in G_e$ se define $X_v : G \longrightarrow TG$ por $X_v(h) = (L_h)_{*e}(v)$. Probar que X_v es diferenciable.

f) Deducir que G es paralelizable.

14. Sean $G = \mathcal{O}(n)$ y $T_h = J_h^{-1}(i_{*h}(G_h))$.

a) Identificando a G_h con T_h, calcular explícitamente la aplicación $L_{h*e} : T_e \longrightarrow T_h$.

b) Para cada $v \in G_e$, sea X_v el campo invariante a izquierda generado por v. Con las identificaciones mencionadas en el inciso anterior, calcular el valor explícito de $X_v(h)$ para cada $h \in G$.

15. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria, $N = (0, 0, 1)$, $M = S^2 - N$ y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde N. Probar que f es conforme.

16. Sean M, N, Q variedades diferenciables, $f : M \longrightarrow N$ submersión y $F : N \longrightarrow Q$ una función tal que $F \circ f$ es diferenciable. Probar que F es diferenciable.

17. FIBRADO DE BASES

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Se define el conjunto

$$\mathcal{B}(M) = \{B \ / \ B \text{ es base de } M_p \text{ para algún } p \in M\}$$

y la función $\pi : \mathcal{B}(M) \longrightarrow M$ por $\pi(B) = p$ si B es base de M_p.

Para cada carta (U, x) de M, sea $\bar{U} = \pi^{-1}(U)$ y sea $\bar{x} : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n^2}$ la función $\bar{x} = (x \circ \pi) \times (\bar{x}^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, donde $(\bar{x}^{ij}(B)) = C(B, \{\frac{\partial}{\partial x^j}|_{\pi(B)}\}_{1 \leqslant j \leqslant n})$, i.e., $v_i = \sum_{j=1}^n \bar{x}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\pi(B)}$, siendo v_i el i-ésimo elemento de B ($1 \leqslant i \leqslant n$).

a) Mostrar que el atlas determinado por los $(\bar{U}, \bar{x})$ define en $\mathcal{B}(M)$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + n^2$.

b) Probar que π resulta diferenciable.

c) Para cada $p \in M$ calcular la fibra por p – $\pi^{-1}(p)$ – y comprobar que se puede identificar con $GL(n, \mathbb{R})$.

18. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ a \neq 0 \;,\; b \in \mathbb{R} \right\}$. Probar que G, con el producto usual de matrices, es un grupo de Lie de dimensión 2.

Encontrar los campos invariantes a izquierda.

19. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $\psi : G \longrightarrow G$ dada por $\psi(g) = g^{-1}$. Calcular $\psi_{*e}(v)$ para cada $v \in G_e$.

20. Mostrar que si una variedad diferenciable M admite una carta del tipo (M, x), entonces es paralelizable.

Mostrar con un ejemplo que una variedad puede ser paralelizable sin que admita una carta global.

21. Probar que $TTM = T(TM)$ es una variedad diferenciable de dimensión $4n$, donde n es la dimensión de la variedad diferenciable M.

22. Verificar que si TM es trivial, entonces TTM también y encontrar una base de campos de TM a partir de una base de campos de M.

23. Sean M y N variedades diferenciables, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Definir un campo $Z \in \mathfrak{X}(M \times N)$ a partir de X y de Y.

24. Sean M y N variedades diferenciables, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se define la aplicación $V : M \times N \longrightarrow TM \times TN$ por $V(p, q) = (X(p), Y(q))$. Probar que V es diferenciable.

25. Sean G un grupo de Lie, $a \in G$ y (U, x) una carta en a. Se define $(\bar{U}, \bar{x})$ por $\bar{U} = a^{-1}.U$ y $\bar{x} = x \circ L_a$. Probar que:

a) $(\bar{U}, \bar{x})$ es una carta en la identidad

b) $L_{a*e}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\big|_e\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_a$.

26. Sea G un grupo de Lie, $U \subset G$ un entorno abierto de e y $X \in \mathfrak{X}(U)$. Probar que existe un entorno abierto V de a tal que $Y_a \in \mathfrak{X}(V)$, siendo $Y_a = L_{a*} \circ X \circ L_{a^{-1}}$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)