Práctica 4

1. Sea G un grupo de Lie dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariante a izquierda. Probar que X es completo.

2. Probar que todo grupo de Lie de dimensión finita es paralelizable.

3. Calcular los campos invariantes a izquierda del grupo de Lie $\mathcal{O}(n)$.

4. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ el campo de vectores nulo, i.e., $X(p) = 0$ para todo $p \in M$. ¿Es completo? ¿Cuál es su grupo uniparamétrico de difeomorfismos?

5. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha : (a,b) \longrightarrow M$ una curva integral de X. Sea $\varphi : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ un difeomorfismo y $\beta = \alpha \circ \varphi$. ¿Bajo qué condiciones es β una curva integral de X?

6. Sea γ una curva integral de $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\dot\gamma(t_1) = 0$ para un t_1 en el dominio de la curva. Probar que γ es constante.

7. Sean M una variedad diferenciable, $U \subset M$ abierto, $\varepsilon > 0$ y $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \longrightarrow M$ un grupo uniparamétrico local de difeomorfismos. Probar que si se define $X(p) = \dot\phi_p(0)$ para $p \in U$, entonces $X \in \mathfrak{X}(U)$.

8. Para $b \in \mathbb{R}$, sea $\phi_b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}$ dada por $\phi_b(t,a) = ae^{tb}$.

Probar que es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y encontrar el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ tal que ϕ_b sea su flujo. Verificar que X es invariante a izquierda en el grupo de Lie $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.

9. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define la ***norma*** de A : $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$

a) Probar que

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad \text{y} \qquad \|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|$$

b) Mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k\|A\|^k}{k!}$ es convergente para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

¿Cuál es su suma?

c) Probar que la sucesión de matrices dada por $S_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}$, $m \in \mathbb{N}$, es convergente en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Nota: queda definida entonces la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \exp : \ \mathbb{R}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ A \quad &\mapsto \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A \end{aligned}$$

d) Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $\varphi(t) = e^{tA}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Calcular $\dot\varphi(t)$.

e) Probar que para toda $T \in GL(n,\mathbb{R})$: $\exp(TAT^{-1}) = T\exp(A)T^{-1}$.

f) Comprobar que si $AB = BA$, entonces : $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.

g) Verificar que : $\exp(A).\exp(-A) = I$.

h) Generalizar el ejercicio 8. al caso $\mathbb{R}^{n\times n}$.

10. En los siguientes casos determinar, para cada $p \in M$, la curva integral maximal $\phi_p : I_p \longrightarrow M$ de X que satisface $\phi_p(0) = p$. Decidir si X es o no completo.

a) $M = \mathbb{R}^2$, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$: $X(u) = u^1 D_1|_u - u^2 D_2|_u$, $u = (u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2$

b) $M = \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$: $X(u) = u^2 D|_u$, $u \in \mathbb{R}$

c) $M = \mathbb{R}^2$, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$: $X(u) = u^2 D_1|_u - u^1 D_2|_u$, $u = (u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2$

11. Deducir del ejercicio anterior que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ generado por $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ está dado por

$$\phi(t,(a,b,c)) = (a \quad b)\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

para el campo del inciso a) del ejercicio anterior, y

$$\phi(t,(a,b,c)) = (a \quad b)\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

para el campo del inciso c) del mismo ejercicio.

12. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ dado por $X(u) = (u^1)^2 D_1|_u + u^3 D_2|_u - u^2 D_3|_u$.

a) Calcular su flujo y decidir si es o no completo.

b) Encontrar la curva integral de X que pasa por $(0,1,0)$ en el instante $t = 0$.

13. Sea $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(t,(a,b,c)) = (ae^{2t}, -3t+b, \ln(t+e^t))$. Probar que es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en $\mathbb{R}^3$.

14. Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo y c una curva integral maximal de X. Probar que si c no es inyectiva, entonces es periódica.

15. Sea G un grupo de Lie dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda. Probar que para todo $h \in G$ se verifica $X \underset{L_h}{\sim} X$.

16. Sea N una variedad diferenciable de dimensión k, $M \subset N$ una subvariedad de N de dimensión n e $i : M \longrightarrow N$ la inclusión. Sea $X \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $X(p) \in i_{*p}(M_p) \subset N_p$ para todo $p \in M$.

a) Se define $Y : M \longrightarrow TM$ por $Y(p) =$ único vector de M_p que satisface $i_{*p}(X(p)) = X(p)$. Probar que $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Deducir que $Y \underset{i}{\sim} X$. Además, Y es el único con esta propiedad.

c) Para cada $p \in M$, sean $\phi_p : I_p \longrightarrow N$ la curva integral maximal de X con $\phi(0) = p$ y $\psi_p : J_p \longrightarrow M$ la curva integral maximal de Y con $\psi(0) = p$. Probar que $J_p \subset I_p$ y que $\psi_p = \phi_p|_{J_p}$.

17. Sea $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ la esfera unitaria $(2n-1)-$dimensional e $i : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la inclusión. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ definido por

$$X(u) = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j u^{2n-j} D_{j+1}|_u$$

a) Probar que para todo $n \geqslant 1$ es $X(p) \in i_{*p}(S_p^{2n-1})$ si $p \in S^{2n-1}$.

b) Sea $Y \in \mathfrak{X}(S^{2n-1})$ el único que satisface $Y \underset{i}{\sim} X$. Calcular el flujo maximal de Y (para $n = 2$) $\phi : \mathbb{R}^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$.

18. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Mostrar que el corchete de Lie satisface las siguientes propiedades.

a) Es $\mathbb{R}-$bilineal:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \qquad [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

b) Es antisimétrico:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

c) **IDENTIDAD DE JACOBI**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Sugerencia: interprete a X, Y, Z como funciones leibnizianas.

19. Probar que

a) $GL(n, \mathbb{R})_I \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$

b) $[X, Y] = XY - YX$ en $GL(n, \mathbb{R})_I$, donde XY indica el producto usual de matrices

20. **ALGEBRA DE LIE**

Sea G un grupo de Lie. Se define

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \ / \ X \text{ es invariante a izquierda}\}$$

a) Probar que $(\mathcal{G}; +; \cdot, [,])$ es un álgebra

NOTA: $\mathcal{G}$ se llama ***álgebra de Lie de*** G.

b) Encontrar un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathcal{G}$ y G_e y deducir que $\dim \mathcal{G} = \dim G$.

c) Definir la operación corchete en G_e y verificar que el isomorfismo hallado en **b**) es también isomorfismo de álgebras.

NOTA: en virtud de lo anterior cada elemento del álgebra de Lie se puede pensar bien como un campo invariante a izquierda, bien como un vector tangente en la identidad.

21. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ invariantes a izquierda. Mostrar que $[X, Y]$ es invariante a izquierda.

22. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X(u) = u^2 D_2|_u$, $Y(u) = u^1 D_2|_u$, $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que $[X, Y] = -Y$.

23. Sean $X, Y \in \mathbb{R}^2$ definidos por $X(p) = D_1|_p$, $Y(p) = \cos(p_1) D_1|_p + \operatorname{sen}(p_2) D_2|_p$, $p = (p_1, p_2)$. Sea $G = \{p \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|p\| < 1 \text{ y } p_2 > 0\}$. Probar

a) $\{X(p), Y(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2_p$ para todo $p \in G$.

b) para ningún $p \in G$ existe una carta (U, x) de $\mathbb{R}^2$ con $p \in U \subset G$ tal que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$ sobre U.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)