# Práctica 5

**1.** Si $(U, x)$ es una carta de la variedad diferenciable $M$, sea $\omega_x \in \Omega^n(U)$ definida por $\omega_x = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Llamaremos a $\omega_x$ la $n-$***forma asociada*** a la carta $(U, x)$.

**a)** Verificar que $\omega_x(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right) = 1$ para todo $p \in U$.

**b)** Sea $(V, y)$ otra carta de $M$ tal que $U \cap V \neq \varnothing$. Probar que $\omega_y(p) = J_{y\circ x^{-1}}(p)\omega_x(p)$ para $p \in U \cap V$. Es decir,

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = J_{y\circ x^{-1}} \,.\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

sobre $U \cap V$, donde $J_{y\circ x^{-1}}$ indica el jacobiano de la aplicación $y \circ x^{-1}$.

**2.** Sea $f : N \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable. Probar que para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(N)$ satisface las siguientes propiedades:

**a)** $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$

**b)** $f^*(g.\omega) = g \circ f \,.\, f^*(\omega)$ , si $g \in \mathcal{F}(M)$

**c)** $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\theta)$

**3.** Sean $A, B$ abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow B$ diferenciable. Probar:

**a)** $f^*(du^i) = df^i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial u^k}\, du^k \qquad (u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$

**b)** $f^*(g \,.\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n) = g \circ f \,.\, \det(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}) \,.\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$ , para $g \in \mathcal{F}(B)$.

**4.** Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$, $p \in M$ , $v \in M_p$ y $\gamma \in M_p^*$. Probar que existen $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tales que

$$X(p) = v \qquad \text{y} \qquad \theta(p) = \gamma$$

**5.** Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$, $W$ un abierto no vacío de $M$, $Z \in \mathfrak{X}(W)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(W)$ y $p \in W$. Probar:

**a)** Existe un abierto $U$ de $M$ con $p \in U \subset W$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X|_U = Z|_U$.

**b)** Existe un abierto $V$ de $M$ con $p \in V \subset W$ y una forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\theta|_V = \omega|_V$.

**6.** Sea $M$ una variedad diferenciable, $r \geqslant 1$ y $T : \mathfrak{X}(M)^r \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ una función $\mathcal{F}(M)-$multilineal. Sea $\bar{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^r \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ definida por

$$\bar{T}(\theta, X_1, \ldots, X_r) = \theta(T(X_1, \ldots, X_r))$$

para $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar:

**a)** $\bar{T}$ es $\mathcal{F}(M)-$multilineal; i.e., es un campo tensorial del tipo $(1, r)$ sobre $M$.

**b)** La función $T \mapsto \bar{T}$ es un isomorfismo.

**7.** Si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, sea $L_X Y = [X, Y]$. ¿Es $L_X : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ una campo tensorial del tipo (1,1)?

**8.** Mostrar que el plano proyectivo real $P_2(\mathbb{R})$ y la cinta de Möbius no son orientables.

**9.** Si $M$ admite una atlas constituido por dos cartas tales que la intersección de sus dominios es conexa, probar que es orientable.

**10.** Deducir del ejercicio anterior que la $n-$esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es orientable.

**11.** Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$. Probar:

**a)** $TM$ es orientable.

**b)** $T^*M$ es orientable.

**c)** Si $TM$ es trivial, entonces $M$ es orientable.

**12.** Probar que todo grupo de Lie de dimensión finita es orientable.

**13.** Sean $M$ y $N$ variedades diferenciables de dimensión $n$ y $k$ respectivamente. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

**a)** $M$ y $N$ son orientables

**b)** $M \times N$ es orientable.

**14.** Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$ y $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(M)$ tales que $\omega_1(p), \omega_2(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Probar:

**a)** Si $\omega \in \Omega^n(M)$, existe una única función $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\omega = f \,.\, \omega_1$

**b)** Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $\omega_1$ y $\omega_2$ inducen la misma orientación

(ii) $\omega_2 = \varphi \,.\, \omega_1$ , con $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ y $\varphi(q) > 0$ para todo $q \in M$

**c)** Si $M$ es conexa y $\omega_2 = g \,.\, \omega_1$, entonces $g > 0$ en $M$ o bien $g < 0$ en $M$.

Composición tipográfica: LaTeX $2_\varepsilon$ (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)