Práctica 6

1. Sea M una variedad diferenciable y $c : [a,b] \longrightarrow M$ una curva. Probar que existe una partición $\{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que $c(t_i, t_{i+1})$ está contenido en dominio de alguna carta de M para todo $i = 0, \ldots, n$.

Generalizar al caso en que el dominio de la curva es cualquier intervalo de $\mathbb{R}$.

2. Sean M y N variedades orientables de dimensión n y $f : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Suponiendo que $\omega \in \Omega^n(N)$ tiene soporte compacto, probar que entonces $f^*\omega$ también tiene soporte compacto y vale:

$$\int \omega = \int f^*\omega$$

3. Sean M y N variedades diferenciables, $f : N \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable y $X : N \longrightarrow TM$ una función que satisface $X(p) \in M_{f(p)}$ para todo $p \in N$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $X \in \mathfrak{X}_f$

b) Para toda $g \in \mathcal{F}(M)$, la función $Xg : N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Xg(p) = X(p)g$ es diferenciable.

4. Sea M paralelizable de dimensión n y $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes. Se define:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

por

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(\varphi^i) X_i$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i$. Probar:

a) ∇ es una conexión sobre M

b) $\nabla_X X_j = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant n$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$

c) $\mathbf{T}(X_i, X_j) = -[X_i, X_j]$ y $\mathbf{R} \equiv 0$

Nota: ∇ se llama ***conexión asociada*** a los campos $X_1, \ldots, X_n$.

5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}(G)$ linealmente independientes. Sea ∇ la conexión asociada a $X_1, \ldots, X_n$. Probar que ∇ no depende de la elección de los n campos linealmente independientes e invariantes a izquierda.

Nota: ∇ se llama la ***conexión canónica*** de G.

6. Verificar que en el caso del grupo de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, la conexión canónica es la usual de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $\mathbf{T} \equiv 0$.

7. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión sobre M. Probar:

a) Si $\bar{\nabla}$ es otra conexión sobre M, entonces $\nabla - \bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es un campo tensorial.

b) Si $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es un campo tensorial, entonces $\nabla + S$ es una conexión sobre M.

c) Si $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es un campo tensorial simétrico, entonces ∇ y $\nabla + S$ tienen el mismo tensor de torsión.

8. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, $X = \sum_{i=1}^{3} \psi^i D_i$ e $Y = \sum_{i=1}^{3} \varphi^i D_i$, se define su ***producto vectorial*** $X \times Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ por:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \mathtt{det} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ \psi^1 & \psi^2 & \psi^3 \\ \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \end{pmatrix} \\ &= (\psi^2\varphi^3 - \psi^3\varphi^2)D_1 + (\psi^3\varphi^1 - \psi^1\varphi^3)D_2 + (\psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1)D_3 \end{aligned}$$

donde `det` es sólo formal.

a) Probar que $S : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definido por $S(X, Y) = X \times Y$ es un tensor antisimétrico.

b) Sea ∇ la conexión usual de $\mathbb{R}^3$, deducir del ejercicio anterior que $\overline{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}S$ es una conexión sobre $\mathbb{R}^3$.

c) Verificar que el tensor de torsión para $\overline{\nabla}$ es : $\overline{\mathbf{T}}(X, Y) = X \times Y$ y que el tensor de curvatura para $\overline{\nabla}$ es $\overline{\mathbf{R}}(X, Y)Z = \frac{1}{4}(X \times Y) \times Z$.

9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, ∇ una conexión sobre M. Si $\mathbf{T} \equiv 0$, probar:

a) **Primera Identidad de Bianchi**

$$\mathbf{R}(X, Y)Z + \mathbf{R}(Y, Z)X + \mathbf{R}(Z, X)Y = 0$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

b) **Segunda Identidad de Bianchi**

$$(\nabla_X \mathbf{R})(Y, Z, U) + (\nabla_Y \mathbf{R})(Z, X, U) + (\nabla_Z \mathbf{R})(X, Y, U) = 0$$

para $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$

10. Sea M una varidad diferenciable de dimensión n, con conexión ∇ y función de conexión $\mathbf{K} : TTM \longrightarrow TM$. Sea N una variedad diferenciable, $f : N \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Utilizando la definición de $\mathbf{K}$ verificar:

a) Si $v \in N_p$, entonces : $\nabla_{f_{*p}(v)} Y = \nabla_v (Y \circ f)$

b) Si $A \in \mathfrak{X}(N)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ están $f-$relacionados; es decir, $f_* A = X \circ f$, entonces $(\nabla_X Y) \circ f = \nabla_A (Y \circ f)$.

11. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, con conexión ∇, $c : I \longrightarrow M$ una curva y $\mathfrak{X}_c^{/\!/} \subset \mathfrak{X}_c$ el subespacio de los campos de vectores paralelos a lo largo de c. Si $t_0 \in I$, $v_1, \ldots, v_n$ es base de $M_{c(t_0)}$, sean $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}_c^{/\!/}$ tales que $X_i(t_0) = v_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

a) Probar que $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son linealmente independientes en $M_{c(t)}$ para todo $t \in I$

b) Sea $Y \in \mathfrak{X}_c^{/\!/}$ tal que $Y(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i v_i$. Probar que si $t \in I$, entonces $Y(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i X_i(t)$

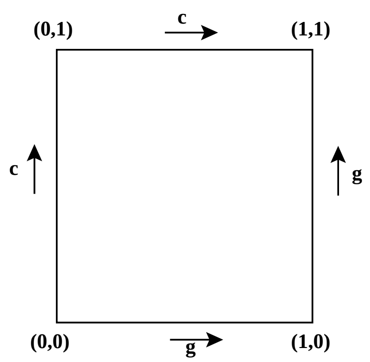
c) Deducir de a) y b) que $\mathfrak{X}_c^{/\!/}$ tiene dimensión $n = \dim(M)$.

12. Sean $D_1, D_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ la base de campos de vectores inducidos por $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id})$ y ∇ la conexión definida por: $\nabla_{D_i} D_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k D_k$, con $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1$ y $\Gamma_{22}^1(u) = -e^{2u_1}$.

a) Si $\mathbf{R}$ es el tensor de curvatura asociado a ∇, probar que $\mathbf{R}(D_1, D_2)D_2 = \Gamma_{22}^1 D_1$.

b) Sean $c, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las curvas diferenciables a trozos definidas por

$$c(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (2t-1, 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (1, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$



Mostrar que las traslaciones paralelas a lo largo de c y de g son diferentes.

13. Sea $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva y $\varphi : J \longrightarrow I$ un difeomorfismo entre intervalos de $\mathbb{R}$. Probar:

a) $\nabla_D (\dot{\widehat{c \circ \varphi}})|_t = \left.\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_t . \; \dot{c}(\varphi(t)) \; + \; \left(\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_t \right)^2 . \; \nabla_D \dot{c}|_{\varphi(t)}$

b) Deducir de a) que si $\dot{c}(0) \neq 0$ y c y $c \circ \varphi$ son geodésicas, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tales que $\varphi(t) = \alpha t + \beta$.

14. Sea $\overline{\nabla}$ la conexión sobre $\mathbb{R}^3$ definida en el ejercicio 8. Si $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva y $X \in \mathfrak{X}_c$ con $X(t) = \sum_{i=1}^{3} a^i(t) D_i|_{c(t)}$, probar:

a) $\overline{\nabla}_D X|_t = \frac{1}{2}\dot{c}(t) \times X(t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{da^i}{dt}\Big|_t D_i|_{c(t)}$

b) Las geodésicas de $\overline{\nabla}$ coindiden con las geodésicas de la conexión usual ∇.

15. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, con conexión ∇ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) X es paralelo

b) Toda curva integral $c : I \longrightarrow M$ de X es una geodésica.

16. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y ∇ la conexión canónica de G. Probar:

a) Si $X \in \mathfrak{L}(G)$, entonces $\nabla_X X = 0$

b) Si $X \in \mathfrak{L}(G)$, toda curva integral de X es una geodésica

c) Si $c : I \longrightarrow G$ es una geodésica, existe $X \in \mathfrak{L}(G)$ tal que c es curva integral de X

d) Si c es una geodésica que pasa por e =neutro de G, entonces $d = L_h \circ c$ es una geodésica que pasa por h

e) ∇ es completa, i.e., las geodésicas de G están definidas en todo $\mathbb{R}$.

17. Para $n \geqslant 1$, sea $I \in GL(n, \mathbb{R})$ la matriz identidad y ∇ la conexión canónica de $GL(n, \mathbb{R})$. Identificando a $GL(n, \mathbb{R})_I$ con $\mathbb{R}^{n \times n}$, probar que las geodésicas $c : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ correspondientes a ∇ que satisfacen $c(0) = I$ y $\dot{c}(0) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son de la forma $c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$.

Interpretar el caso $n = 1$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)