Geometría Diferencial

15/10/2003

Parcial 1

(1) Sea $M = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid ||p|| = 1\}$ la esfera. Dieguito quiere hacerla girar alrededor del eje z a una velocidad de 3 vueltas por segundo, en sentido horario (Dieguito es zurdo). Probar que existe un grupo uniparamétrico $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ que actúa de la manera deseada (puede suponerse las unidades de manera que un segundo corresponda a $t = 1$). Calcular el campo generado por Φ. Llamarlo X. Encontrar una carta (U, φ) tal que $(1, 0, 0) \in U$ de manera tal que X coincida con $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$ en U.

(2) Sea $X = S^1 \times \mathbb{R}$ el cilindro. Se considera el atlas

$$\mathcal{B} = \{(U_N, \varphi_N \times \mathrm{id}), (U_S, \varphi_S \times \mathrm{id})\},$$

donde N, S son el polo norte y sur de S^1, $U_N = (S^1 - \{N\}) \times \mathbb{R}$, $U_S = (S^1 - \{S\}) \times \mathbb{R}$, y φ_N, φ_S son las proyecciones estereográficas de S^1. Encontrar dos atlas $\mathcal{A} = \{(X, \varphi)\}$ y $\mathcal{A}' = \{(X, \varphi')\}$, ambos dados por una sola carta, tales que $\mathcal{A}$ sea equivalente a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}'$ no.

(3) Sea M una variedad, $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable.

(a) Identificando el tangente a $\mathbb{R}$ (en cualquier punto) con $\mathbb{R}$ de la manera natural, probar que si $v \in T_p(M)$ es un vector tangente, entonces $v(f) = (d_p f)(v)$.

(b) Sea (U, φ) una carta de M. Se considera para $p \in U$ el producto interno $<,>$ en T_pM tal que la base $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $i = 1, \ldots, \dim M$ es ortonormal. Probar que si $w^f \in T_pM$ se define por $w^f = \sum_{i=1}^{\dim M} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}|_p \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, entonces $< w^f, v >= v(f)$.

(c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Se define $V_f = \{f = 0\}$, $V_g = \{g = 0\}$. Para $p \in V_f \cap V_g$, se define el vector h_p como el producto vectorial entre w^f y w^g, definidos como en el punto anterior. Probar que si $h_p \neq 0$ para todo $p \in V_f \cap V_g$ entonces $V_f \cap V_g$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Encontrar en este caso $d_p i(T_p(V_f \cap V_g))$, donde i es la inclusión.

(4) Sea G un grupo de Lie, y $X \in \Gamma(TG)$ un campo invariante a izquierda (es decir, $d(L_g)(X(h)) = X(L_g(h)) = X(gh)$, $\forall g, h \in G$, donde $L_g(h) = gh$ es la función de multiplicar a izquierda). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times G \to G$ el flujo de X. Sea $A_g : G \to G$ la función $A_g(h) = ghg^{-1}$.

(a) Probar que $\Phi(t, g) = g\Phi(t, e)$ $\forall g \in G$ ($e \in G$ es la unidad).

(b) Si Y es otro campo invariante a izquierda y $\gamma : \mathbb{R} \to T_e(G)$ es la curva dada por

$$\gamma(t) = d_e A_{\Phi(t,e)}(Y(e)),$$

probar que identificando el tangente a $T_e(G)$ con sí mismo se tiene $\dot{\gamma}(0) = [X, Y](e)$. (Sugerencia: usar que $[X, Y](e) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Big(d_{\Phi(t,e)}\Phi_{-t}(Y(\Phi(t, e)))\Big)$).