Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Práctica 1

Definición de variedad

(1) Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encontrar un atlas.
  (a) Esfera $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $d = n$.
  (b) Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$.
  (c) Espacio proyectivo, segunda versión: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, donde $x \sim y$ sii son l.d.
  (d) Toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n veces), $d = n$.
  (e) Cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $d = 2$.

(2) Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d, dada por el teorema de la función implícita.
  (a) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $n = m^2$;
  (b) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, $n = m^2 - 1$;
  (c) $\mathrm{O}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = 1\}$, $n = m(m-1)/2$;
  (d) $\mathrm{SO}_{n,m} = \{A \in M_{n+m}(\mathbb{R}) \mid AI_{n,m}A^t = I_{n,m},\ \text{y}\ \det(A) = 1\}$, donde $I_{n,m}$ es una matriz diagonal con n unos y m menosunos.

(3) Dada una variedad $(X, \mathcal{A})$, se define la *topología subyacente* de X como sigue: un subconjunto $Y \subset X$ es abierto sii $\phi(U \cap Y)$ es abierto $\forall\,(U,\phi) \in \mathcal{A}$. Probar que esta topología depende sólo de la clase de equivalencia de $\mathcal{A}$.

(4) Probar que si $(X, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y (ϕ_i, U_i) son cartas compatibles con el atlas entonces son cartas compatibles entre sí. Deducir que toda variedad diferenciable tiene un único atlas maximal equivalente.

(5) En $\mathbb{R}$ definimos las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, c)$, donde $c(x) = x^3$. Probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

(6) Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$ depende sólo de la clase de equivalencia del atlas de X. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to Y$ depende sólo de las clases de equivalencia de los atlas de X e Y.

(7) Sea $X = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre X; una es $(\mathrm{id}, \mathbb{R}^n)$. La otra es (ϕ, U), donde $U = X - \{0\}$, $\phi(x) = x$ si $x \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que con esta estructura X es una variedad diferenciable. Probar que si n es par, X es una variedad compleja. Pero X no es T_2.

(8) Probar que $\mathrm{id} : X \to X$ es diferenciable. Probar que la composición de funciones diferenciables lo es. Probar que $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x,x)$ es diferenciable. Probar que las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son diferenciables.

(9) Probar que $\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si $g : X \to Y$ es diferenciable, entonces $g^* : \mathcal{D}(Y, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}(X, \mathbb{R})$ es un morfismo de anillos.

(10) Sea $x \in X$; probar que el conjunto de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de x, $\mathcal{D}_x(X)$, es un anillo. ¿Qué pasa con estos anillos si se tiene $g : X \to Y$ diferenciable?

(11) Sea $x \in X$; probar que la aplicación cociente $f \mapsto \bar{f}$ da un morfismo de anillos $\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}_x(X)$.

(12) $(*)$ Sean $0 < r < R < \infty$ números reales positivos, y sea $C_{r,R}$ la corona $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$. Probar que dados $0 < s < S < \infty$, $C_{r,R}$ y $C_{s,S}$ son difeomorfos, pero que son isomorfos como variedades complejas si y sólo si $R/r = S/s$.