Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Práctica 2

Espacios tangentes

Nota: En esta práctica, salvo que se diga lo contrario X es una variedad con atlas $\mathcal{A}$ y $x \in X$, $\mathcal{D}_x(X)$ es el anillo de gérmenes alrededor de x y $\mathcal{M}_x = \{\overline{(U,f)} \in \mathcal{D}_x(X) \mid f(x) = 0\}$ es su ideal maximal.

(1) Consideramos el anillo $\mathbb{R}[\epsilon]/\epsilon^2 = \{a + b\epsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, con el producto

$$(a + b\epsilon)(a' + b'\epsilon) = aa' + (ab' + a'b)\epsilon.$$

Probar que $T_x(X)$ se puede identificar con los morfismos de anillos $\mathcal{D}_x(X) \to \mathbb{R}[\epsilon]/\epsilon^2$.

(2) Sea $n = \dim X$. Consideremos una familia como sigue: para cada $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U$, tomamos un vector $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, de manera tal que si (V,ψ) es otro entorno coordenado de x con vector asociado $w = (w_1, \ldots, w_n)$, entonces $w^t = d(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))v^t$. Probar que la colección de estas familias se puede identificar con $T_x(X)$.

(3) Probar que el espacio tangente se puede definir "globalmente". Es decir, probar que se puede identificar T_xX con los morfismos lineales $d : \mathcal{D}(X) \to \mathbb{R}$ tales que $d(fg) = d(f)g(x) + f(x)d(g)$.

(4) Recordar la expresión integral del resto de Taylor para una función de varias variables. Probar entonces que si $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, $x \in U$, y $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces existe un abierto W tal que $x \in W \subset U$, y tal que $f(y) = f(x) + \sum_i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x(f)(\varphi^i - \varphi^i(x)) + h(y)$ en W, donde $h : W \to X$ es diferenciable.

(5) Sea (U,φ) una carta con $x \in U$, $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. Probar que $\{\overline{\varphi^1 - \varphi^1(x)}, \ldots, \overline{\varphi^n - \varphi^n(x)}\}$ es una base de $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$.

(6) (Variedades pegadas) Sean $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ variedades diferenciables, todas de dimensión n. Supongamos que para cada par $i \neq j$ están dados dos abiertos: $U_{ij} \subset X_i$ y $U_{ji} \subset X_j$, y un difeomorfismo

$$X_i \supset U_{ij} \xrightarrow{f_{ij}} U_{ji} \subset X_j,$$

donde consideramos para los abiertos la estructura de variedad heredada. Estos morfismos satisfacen las siguientes propiedades:
(a) $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$,
(b) $f_{ij}(U_{ik} \cap U_{ij}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, y $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferenciable $(X, \mathcal{A})$, y morfismos $\psi_i : X_i \to X$ para cada i, tales que
(a) ψ_i es un difeomorfismo entre X_i y un abierto de X,
(b) los abiertos $\psi_i(X_i)$ cubren X,
(c) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$,
(d) $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ en U_{ij}.

(7) Construir mediante pegado el ejemplo de variedad que no es Hausdorff de la práctica 1.

(8) En este ejercicio, para $0 < r < s$ notamos

$$B_s(y) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z - y|| < s\} \quad \text{y} \quad B_{r,s}(y) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid r < ||z - y|| < s\}.$$

Sea X una n-variedad, $x \in X$ y (U',φ) una carta con $x \in U'$, y pongamos $y = \varphi(x)$. Supongamos que $\underline{B_\epsilon(y)} \subseteq \varphi(U')$. Sea $Z = S^{n-1} \times (0,1)$ el cilindro con la estructura producto. Tomemos $X_\epsilon = X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_{\epsilon/2}(y)})$, y $U_\epsilon = \varphi^{-1}(B_{\epsilon/2,\epsilon}(y))$. Tomemos $V = S^{n-1} \times (\frac{1}{2}, 1) \subset Z$ y $g : V \to B_{\epsilon/2,\epsilon}(y)$, $g(z,t) = y + \epsilon t z$. Componiendo estas funciones convenientemente, pegar X_ϵ con Z.
Observación: Esta construcción no es útil en sí misma (al fin y al cabo la variedad resultante es difeomorfa a X_ϵ) sino que es una herramienta para la que sigue.

(9) (Suma de variedades) Sean X, Y dos variedades de dimensión n, $x \in X$, $y \in Y$. Se consideran cartas (U',φ_x), (V',φ_y) con $x \in U'$, $y \in V'$. Se toma como en el ejercicio anterior el cilindro

$Z = S^{n-1} \times (0,1)$, y se pegan, como en el ejercicio anterior, X con Z por un lado, e Y con Z por el otro, pero en este último caso se compone el pegado con el difeomorfismo del cilindro $(z,t) \mapsto (z, 1-t)$. Describir esto prolijamente como un caso particular del pegado de variedades.

Definición: La variedad anterior se llama *suma* de X e Y y se nota por $X\#Y$.

(10) (Fácil) dibujar $T\#T$, donde T es el toro. (Difícil) dibujar $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$, donde $\mathbb{P}^2$ es el plano proyectivo.

Observación: Se puede probar que cualquier variedad compacta de dimensión 2 es homeomorfa a la esfera S^2, a la suma de n toros $T\#\cdots\#T$ (para algún n), o a la suma de n planos proyectivos $\mathbb{P}^2\#\cdots\#\mathbb{P}^2$ (para algún n). Es más, estas variedades no son homeomorfas entre sí.

(11) Describir la suma de X e Y sin la ayuda del cilindro Z.

(12) Sean $x, X, U', \varphi, \epsilon, U$ como en el ejercicio 8. Probar que el pegado de Z y X descripto allí es difeomorfo al mismo pegado pero reemplazando ϵ por $\epsilon' < \epsilon$. Probar que existe un entorno de x tal que si se reemplaza x por x' en el entorno y se toma ϵ' suficientemente chico, el pegado resulta difeomorfo al original, con x y ϵ. Probar que si se utiliza otra carta (U_1', φ_1) en lugar de (U', φ) el resultado es difeomorfo al original. Deducir que si X e Y son conexas, la suma no depende de x, y, ni de los correspondientes ϵ, ni de las cartas que se tomen (esto justifica que no se los mencione en la notación $X\#Y$).

(13) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $X = \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$ su gráfico, visto como variedad mediante la carta (X, π), $\pi(u, f(u)) = u$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$, $g(u, f(u)) = f(u)$. Calcular $\frac{\partial}{\partial \pi^i}|_p(g)$ en función de las derivadas parciales de f.

(14) Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ la esfera, y sea $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(p) = (\mathrm{dist}(p, N))^2$, donde $N = (0,0,1)$ y dist es la distancia euclídea.
   (a) Probar que f es diferenciable.
   (b) Sean (U, φ_N) y (V, φ_S) las proyecciones estereográficas. Sea $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Se definen
$$v_1 = 8\frac{\partial}{\partial \varphi_N^1}|_p + 5\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \varphi_N^2}|_p, \qquad v_2 = (-15\sqrt{2}+20)\frac{\partial}{\partial \varphi_N^1}|_p + (-24+16\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial \varphi_N^2}|_p.$$
   Calcular $v_1(f)$ y $v_2(f)$.
   (c) Probar que $v_1 = v_2$.

(15) Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro, mirando $S^1 \subset \mathbb{C}$. Se toma la función $f(e^{it}, e^{iu}) = \mathrm{sen}(nt)\cos(mu)$, donde $n, m \in \mathbb{Z}$. Elegir alguna carta alrededor de $p = (1,1) \in T$ y calcular las derivadas de f con respecto a las coordenadas dadas por la carta en p.

(16) Sean X, Y variedades, $x \in X$, $y \in Y$. Tomamos las inclusiones $i_X : X \to X \times Y$, $i_X(a) = (a, y)$, e $i_Y : Y \to X \times Y$, $i_Y(b) = (x, b)$. Probar que $T_{(x,y)}(X \times Y) = (i_X)_{*x} T_x X \oplus (i_Y)_{*y} T_y Y$.

(17) Sea $C = S^1 \times \mathbb{R}$ el cilindro, y sea $X = S^2 \times C$. Miramos $X \subset \mathbb{R}^6$ mediante
$$X = \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \mid ||(a_1, a_2, a_3)|| = 1,\ ||(b_1 - 3, b_2)|| = 1\}.$$
Tomamos $g : X \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{a} - \mathbf{b}||$ (notación: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$). Tomar cartas (U, φ) y (V, ψ) de S^2 y C alrededor de los puntos $\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y $\mathbf{b} = (3 + \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$. Considerar la carta $(U \times V, \varphi \times \psi)$ de X.
   (a) Calcular $\frac{\partial}{\partial(\varphi\times\psi)^i}|_{\mathbf{p}}(g)$, $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $i = 1, \ldots, 4$.
   (b) Identificar $T_{\mathbf{a}}S^2 \oplus T_{\mathbf{b}}C$ con $T_{\mathbf{p}}(S^2 \times C)$ y escribir los vectores $\frac{\partial}{\partial(\varphi\times\psi)^i}|_{\mathbf{p}}$, $i = 1, \ldots, 4$, como combinaciones lineales de $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_{\mathbf{a}}$ y $\frac{\partial}{\partial\psi^i}|_{\mathbf{b}}$, $i = 1, 2$.
   (c) Calcular nuevamente $\frac{\partial}{\partial(\varphi\times\psi)^i}|_{\mathbf{p}}(g)$ usando los vectores $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_{\mathbf{a}}$ y $\frac{\partial}{\partial\psi^i}|_{\mathbf{b}}$.

(18) Calcular el diferencial de $f : S^1 \times (-1, 1) \to S^2$,
$$f(z,t) = (z_1\sqrt{1-t^2}, z_2\sqrt{1-t^2}, t), \qquad \text{donde } z = z_1 + iz_2,$$
en los puntos de la forma $(1, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$.

(19) Probar que si X, Y, Z son variedades, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones diferenciables, $f(x) = y$, $g(y) = z$, entonces $(dg)(y) \circ (df)(x) = d(fg)(x)$. Probar que $d(\mathrm{id}_X)(x) = \mathrm{id}_{T_x(X)}$ para todo $x \in X$.

(20) Sea $f : X \to Y$ diferenciable, $y \in Y$ un valor regular. Probar que si sobre $Z = f^{-1}(y)$ se toma la estructura dada por el teorema de la función implícita, entonces $i_{*p}(T_pZ) = \ker(f_{*p})$, donde $i : Z \to X$ es la inclusión.
Meditar sobre la frase "el gradiente es ortogonal a la superficie de nivel", oída en los cursos básicos de Análisis.

(21) Sea $X = \mathrm{GL}_n(= \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ y se considera $\det : X \to \mathbb{R}$. Dado que GL_n es un abierto, identificamos $T_I \mathrm{GL}_n \simeq T_I M_n \simeq M_n$ y llamamos e_{ij} a las coordenadas. Calcular $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}}$. Expresar en coordenadas en la base $\{e_{ij}\}$ la imagen de $T_I(\mathrm{SL}_n) \hookrightarrow T_I(\mathrm{GL}_n)$.

(22) Repetir el ejercicio anterior para la inclusión $\mathrm{SO}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$. Más en general, hacerlo para la inclusión $\mathrm{SO}_{n|m}(= \mathrm{SO}_{n,m}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+m}$.

(23) Sea $C = S^1 \times (-1, 1)$ el cilindro. Se toma $g : C \to C$ dado por $g(z, t) = (-z, -t)$, mirando $S^1 \subset \mathbb{C}$. Probar que es un difeomorfismo y observar que tiene orden 2. Luego, $\mathbb{Z}_2$ actúa vía g sobre C. Probar que actúa propia y discontinuamente. Darle un nombre a la variedad cociente.

(24) Hacer lo mismo que el ejercicio anterior, pero tomando $T = S^1 \times S^1$ el toro, $g(z, w) = (-z, \bar{w})$, donde $\bar{\ }$ denota conjugación.

(25) Sean $r \leq n$ números naturales. Se considera en $\mathbb{R}^n$ el conjunto de subespacios de dimensión r, y se lo denota $\mathrm{Gras}(r, n)$ (ó (r, n)-Grassmanniana). Sea $I \subset \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de cardinal r. Se toma $V_I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\ \forall j \in I\}$, y se toma $U_I = \{W \in \mathrm{Gras}(r, n) \mid W \cap V_I = \{0\}\}$.
  (a) Si $W \in U_I$, probar que W tiene una base $\{w_1, \dots, w_r\}$ tal que si se escribe $w_i = \sum_j w_{ij} e_j$ ($\{e_j\}$ es la base canónica) e $I = \{j_1, \dots, j_r\}$ con $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, entonces la matriz $(w_{i,j_k})_{1 \leq i,k \leq r}$ es la identidad de $M_r(\mathbb{R})$. Probar que esta base es única.
  (b) Si $L = \{1, \dots, n\} - I = \{l_1, \dots, l_{n-r}\}$ con $l_1 < \cdots < l_{n-r}$, para $W \in U_I$ se toma
$$\varphi_I(W) = (w_{i,l_k})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq n-r} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} = \mathbb{R}^{r(n-r)},$$
donde (w_{ij}) es como en el punto anterior. Probar que $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{r(n-r)}$ es biyectiva.
  (c) Probar que tomando todos los $I \subset \{1, \dots, n\}$ posibles de cardinal r, el conjunto $\{(U_I, \varphi_I)\}_I$ es un atlas de $\mathrm{Gras}(r, n)$.

De ahora en más, se tomará $\mathrm{Gras}(r, n)$ con esta estructura diferenciable. Observar que si $r = 1$, obtenemos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$.