Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Práctica 3

Fibrados, Campos. Álgebra multilineal.

Notación: notamos con $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ los campos diferenciables de una variedad M.

(1) Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

(2) Sea $p \in M$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $T_p(M)$. Probar que existe una carta (U, φ) tal que $\forall i = 1, \dots, n$ se tiene $v_i = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$.

(3) Sea $p \in M$, X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, φ), con U incluido en el dominio de X, tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \varphi^1}$.

(4) Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando T_pM con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi^2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$. (Sugerencia: mirar el ejercicio 8.)

(5) Probar que si $M = S^1$, TM es difeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

(6) Probar que $\mathfrak{X}(M)$ se puede identificar con el espacio de funciones

$$\{F : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M) \mid F \text{ es lineal y } F(fg) = F(f)g + fF(g)\}.$$

(7) Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ como $[X, Y] = XY - YX$ (vistos como funciones $\mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$). Probar que $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se satisfacen las siguientes igualdades:
   (a) $[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$, $[X, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2] = \beta_1 [X, Y_1] + \beta_2 [X, Y_2]$ (bilinealidad),
   (b) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetría),
   (c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi).
   Probar que además, para $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

(8) Probar que si (U, φ) es una carta de M, $[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}] = 0 \ \forall i, j$ (miramos aquí los campos en $\mathfrak{X}(U)$).

(9) Sea G un grupo de Lie. Para $g \in G$, notamos $L_g : G \to G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo. Decimos que es *invariante a izquierda* si $\forall g, h \in G$ se tiene $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$. Es decir, si $(dL_g) \circ X = X \circ L_g$.
   (a) Definir *campo invariante a derecha*.
   (b) Probar que combinaciones lineales de campos invariantes a izquierda son invariantes a izquierda.
   (c) Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.
   (d) Deducir que hay un isomorfismo entre $T_g(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.

(10) Probar que todo grupo de Lie es paralelizable. Probar que si $G = S^1$, TG es difeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

(11) Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda. Si denotamos $\mathfrak{g} = T_e(G)$, donde $e \in G$ es el elemento neutro, deucir que $\mathfrak{g}$ hereda una estructura de *álgebra de Lie*; es decir tiene una operación binaria $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que es bilineal, antisimétrica, y satisface la igualdad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(12) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = (df)(X(p)) \ \forall p \in M$, es decir, si $Y \circ f = (df) \circ X$. Notamos $X \sim_f Y$.
   (a) Probar que si c es una curva integral de X entonces fc es una curva integral de Y.
   (b) Probar que si $X_i \sim_f Y_i$ $(i = 1, 2)$ entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

(c) Probar que son equivalentes
- $X \sim_f Y$,
- para todo abierto $U \subseteq N$ y toda $g \in \mathcal{D}(U)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(U)$,
- para toda $g \in \mathcal{D}(N)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(N)$.

(13) (a) Consideremos $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que π es diferenciable de rango constante. Deducir que T_pM es una subvariedad de TM.
(b) Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Miramos $T_pM = (d_pi)(T_pM) \subseteq T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$. Tomamos $F : TM \to \mathbb{R}$, $F(v) =< v, v >$, producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Probar que $T_1M := F^{-1}(1)$ es una subvariedad de TM de dimensión $2 \dim M - 1$.

(14) En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador $X \in \mathfrak{X}(M)$
(a) $M = V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión finita) y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.
(b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.
(c) $M = \mathrm{GL}_2$, $\phi(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$.
(d) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.

(15) Si (U, φ) es una carta de M, calcular una curva integral del campo $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$.

(16) En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo X.
(a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (vía la identificación $T_x\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$).
(b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
(c) $M = \mathrm{GL}_n$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.

(17) Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \to M$ la curva integral maximal tal que $c(0) = p$. Si $\exists t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.

Obs: a partir de aquí la práctica podría ser una práctica de álgebra II. En particular, M será un módulo y TM su álgebra tensorial (definida más adelante).

(18) Sea $\mathbb{S}_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$ el grupo simétrico en n elementos. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica 0 (en esta materia se puede suponer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Sea

$$\mathbb{K}[\mathbb{S}_n] = \{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{K}\}$$

el álgebra de grupo. Definimos en $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ los elementos $S_0 = \frac{1}{n!}\sum_\sigma \sigma$ y $S_1 = \frac{1}{n!}\sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma)\sigma$. Probar que $S_i^2 = S_i$ $(i = 1, 2)$.

(19) Sea M un A-módulo, A un anillo conmutativo. Probar que $\mathbb{S}_n$ actúa en $M^{\otimes n}$ por $\sigma \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma^{-1}(n)}$. En particular, si A contiene a $\mathbb{K}$ entonces S_0 y S_1 definen morfismos $M^{\otimes n} \to M^{\otimes n}$.

(20) Sea A un anillo conmutativo que contiene a $\mathbb{K}$; sea M un A-módulo. Definimos el álgebra tensorial $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes n}$ (donde $M^{\otimes 0} := A$). Definimos el álgebra simétrica SM de M por $SM := T(M)/I$, donde I es el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $m \otimes n - n \otimes m$. Probar, observar o aceptar que $I = \oplus_n I_n$, donde $I_n = I \cap M^{\otimes n}$. Probar que $I_n \subseteq \ker(S_0)$ (Obs: vale la igualdad, pero la prueba es más delicada. Ver ejercicio 22).

(21) Este ejercicio es análogo al anterior, cambiando "álgebra simétrica SM"por "álgebra exterior ΛM", $m \otimes n - n \otimes m$ por $m \otimes n + n \otimes m$, S_0 por S_1, y "ejercicio 22"por "ejercicio 23".

(22) Supongamos que M es libre de rango finito, con base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Probar que las clases en S^dM de los elementos del siguiente conjunto son una base del álgebra simétrica en grado d:

$$\{b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n} \mid i_j \geq 0,\ i_1 + \cdots + i_n = d\}.$$

Probar la igualdad en el ejercicio 20. (Sugerencia: probar primero que las clases generan el álgebra simétrica y luego que S_0 manda el conjunto a un conjunto l.i.)

(23) Supongamos que M es libre de rango finito, con base $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Probar que las clases en $\Lambda^d M$ de los elementos del siguiente conjunto son una base del álgebra exterior en grado d:

$$\{b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n} \mid i_j \in \{0, 1\},\ i_1 + \cdots + i_n = d\}.$$

Probar la igualdad en el ejercicio 21.

(24) Deducir de los ejercicios 22 y 23 que SM y ΛM se pueden mirar como subespacios de TM vía S_0 y S_1 respectivamente. Estos subespacios ¿son subálgebras?

(25) Adscribimos a la notación típica para el álgebra exterior, notando el producto con cuñas: $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$. Probar que si $n_i = \sum_{ij} a_{ij} m_j$, entonces $n_1 \wedge \cdots \wedge n_d = \det(a_{ij}) m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$.

(26) Sea $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ el dual de M, $f_1, \ldots, f_d \in M^*$ y $m_1, \ldots, m_d \in M$. Calcular $(S_1(f_1 \wedge \cdots \wedge f_d))(m_1 \otimes \cdots \otimes m_d)$ en función de los coeficientes $f_i(m_j)$ (aquí estamos usando la dualidad $(M^*)^{\otimes d} \simeq (M^{\otimes d})^*$.

(27) Probar que las álgebras tensorial, simétrica y exterior son funtoriales:
  (a) si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, f induce morfismos de álgebras $(Tf) : TM \to TN$, $(Sf) : SM \to SN$, $(\Lambda f) : \Lambda M \to \Lambda N$.
  (b) estos morfismos respetan la composición: si $g : N \to P$, $T(gf) = (Tg)(Tf)$, $S(gf) = (Sg)(Sf)$, $\Lambda(gf) = (\Lambda g)(\Lambda f)$.
  (c) $T(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $S(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $\Lambda(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

(28) Si V, W son espacios vectoriales con bases $\{v_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, $\{w_j \mid j = 1, \ldots, m\}$ respectivamente, y $f : V \to W$ un morfismo lineal, se denotan $f_{j_1,\ldots,j_d}^{i_1,\ldots,i_d}$ los coeficientes matriciales, de $(f \otimes \cdots \otimes f) : V^{\otimes d} \to W^{\otimes d}$, es decir,

$$f(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = \sum_{j_1,\ldots,j_d} f_{j_1,\ldots,j_d}^{i_1,\ldots,i_d} w_{j_1} \otimes \cdots \otimes w_{j_d}$$

Calcular $f_{j_1,\ldots,j_d}^{i_1,\ldots,i_d}$.

(29) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V. Probar que si g es otro endomorfismo, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$. (Sugerencia: considerar $\Lambda^n V$).