Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Práctica 4

Formas

1. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $\alpha \in \Gamma((T^*Y)^{\otimes r})$ un campo de covectores de grado r, al que identificamos, en cada $y \in Y$, con un campo de aplicaciones multilineales $T_yY \times \cdots \times T_yY \to \mathbb{R}$.

   Probar que f induce un campo de covectores de grado r, $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*X)^{\otimes r})$, que vía la identificación anterior se define por
$$f^*(\alpha)(x)\big(v_1, \ldots, v_r\big) = \alpha(f(x))\big(df(x)(v_1), \cdots, df(x)(v_r)\big).$$
   Si (U, φ) es una carta de X alrededor de x, (V, ψ) es una carta de Y alrededor de $y = f(x)$, $f(U) \subseteq V$ y α se escribe localmente como
$$\alpha(x) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_r \le n} a_{i_1, \ldots, i_r}(x) d\psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\psi_{i_r},$$
   encontrar las coordenadas de $f^*(\alpha)$ en la base $d\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi_{i_r}$. Probar que si α es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos), $f^*(\alpha)$ también lo es.

2. Sea X una variedad, ω una 1-forma. Sean (U, φ), (V, ψ) dos cartas alrededor de un punto $x \in X$. Si $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\varphi_i = \sum_i \beta_i d\psi_i$, encontrar la relación entre los α_i y los β_i.

3. Si ω es una k-forma, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim X = 3$?

4. Sea X una variedad diferenciable, (U, φ) una carta y $\omega \in \Omega^p(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, φ) para los casos $0 \le p \le 2$.

5. Sea $\omega \in \Omega^p(X)$. Probar que
$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

6. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable ("clásico").
   a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.
   b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.
   c) Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
      1) df y ∇f,
      2) $\operatorname{rot} F$ y $d\omega_F^1$,
      3) $\operatorname{div} F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).

   Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas clásicas $\operatorname{rot} \nabla \equiv 0$ y $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$.

7. Un fibrado vectorial $Y \to X$ de dimensión d se dice *orientable* si existe una sección continua nunca nula de $\Lambda^d Y$. Una variedad se dice *orientable* si su fibrado tangente lo es. Probar que una variedad es orientable si y solo si su fibrado cotangente lo es.

8. Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Probar que TM es orientable.

9. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A} = \{(U, x); (V, y)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.

10. Ver que si M es paralelizable, es orientable.

11. Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:
 a) M y N son orientables
 b) $M \times N$ es orientable

12. Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.

13. Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{A}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$ el signo de $J(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.

14. Sea V un espacio vectorial con base $\{v_1, \dots, v_n\}$; sea $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual. Tomemos en el espacio $V \otimes V^*$ el elemento $I = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^*$. Probar que este elemento no depende de la base elegida.

 Una manera de pensar este ejercicio es la siguiente: probar que $\mathrm{Hom}(V, V) \simeq V \otimes V^*$ vía la función $f \mapsto \sum_i v_i \otimes (v_i^* \circ f)$. La manera de probar que es un iso es encontrar la inversa, donde además queda claro que pese a la escritura esta función no depende de la base. Luego, el elemento canónico de arriba corresponde a la identidad de V.

 Ya que estamos: el dual de $\mathrm{Hom}(V, V)$, es decir $(V \otimes V^*)^* \simeq V^* \otimes V$, tiene otro elemento canónico: $\sum_i v_i^* \otimes v_i$. ¿A qué transformación lineal $\mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{R}$ corresponde?

15. Sea X una variedad de dimensión n y $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Sea (U, φ) una carta de X, sea $V = \pi^{-1}(U)$ el abierto correspondiente de M ($\pi : M \to X$ es la proyección a la base) y $\psi : V \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, $\psi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n})$. Tomamos la 2-forma en V dada por $J = \sum_{i=1}^n d\psi_i \wedge d\psi_{n+i}$. Probar que no depende de la carta (U, φ); es decir, si (U', φ') es otra carta, V' y J' se definen de manera análoga, entonces $J = J'$ en la intersección $V \cap V'$ (usar el ejercicio anterior). Deducir que esto define una 2-forma global $J \in \Omega^2(M)$. Probar que es no degenerada y cerrada. Recordar que una variedad con una 2-forma no degenerada y cerrada se dice *simpléctica*.

16. Probar que en el caso anterior ($M = T^*X$) se puede definir un tensor de tipo $(2, 0)$ antisimétrico $\tilde{J}$ no degenerado. Probar que $\tilde{J}$ define un corchete bilineal y antisimétrico $\{,\} : \mathcal{D}(M) \otimes \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ dado por $\{f, g\} :=< \tilde{J}, df \otimes dg >$. Sea $\mathcal{H} \in \mathcal{D}(M)$ una función fija. Probar que las soluciones de las ecuaciones $\dot{f} = \{H, f\}$ $(f \in \mathcal{D}(M))$ están dadas por las curvas integrales de un campo que depende de $\mathcal{H}$ y $\tilde{J}$.