Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Práctica 5

Variedades riemannianas y conexiones

1. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea
$$T : \mathfrak{X}M \otimes \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M, \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
su torsión. Probar que T es $\mathcal{D}(M)$-bilineal.

2. Sea S un tensor de tipo (r,s), es decir, $S : \mathfrak{X}(M)^{\otimes s} \to \mathfrak{X}(M)^{\otimes r}$, que en coordenadas locales se puede escribir como
$$S(x) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_s}} a^{j_1,\dots j_s}_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_r}} \otimes d\varphi_{j_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi_{j_s}$$
Probar que S es $\mathcal{D}(M)$-multilineal. Recíprocamente, probar que una función $\mathcal{D}(M)$-multilineal $S : \mathfrak{X}(M)^{\otimes s} \to \mathfrak{X}(M)^{\otimes r}$ es un tensor.

3. Probar que el espacio de conexiones de una variedad es un espacio afín. En particular, probar que:
   a) Una combinación lineal $\sum_i \alpha_i \nabla^i$, donde los ∇^i son conexiones y $\sum_i \alpha_i = 1$, es una conexión.
   b) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

4. Probar que si (U,φ) es una carta de M, entonces la asignación $X \otimes (\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ define una conexión en U.

5. Probar que una variedad T_2 y N_2 admite una conexión (sugerencia: usar los dos ejercicios anteriores).

6. Probar que si ∇ es una conexión en M con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

7. Encontrar una métrica de tipo $(1,1)$ sobre el toro.

8. *a*) Consideramos g en $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$. Si (U,x) es la carta tal que $x^{-1} : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2$ es $x^{-1}(\theta,\alpha) = (\sin(\theta)\cos(\alpha), \sec(\theta)\cos(\alpha), \cos(\theta))$.
   Encontrar la expresión local de la métrica g en la carta (U,x). Expresar el elemento de volumen en la misma carta (es decir una 2-forma ω tal que $\omega(p)(v_1,v_2) = \pm 1$ si $\{v_1,v_2\}$ es base ortonormal de M_p.
   b) $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) : \ y > 0\}$ (semiplano de Poincaré). Con respecto a la carta usual $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{id})$ consideramos la métrica $g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.
   c) Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$. (Ver que el teorema de Levi-Civita se puede extender a métricas pseudo-riemannianas.)

9. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M la métrica sobre M pull-back de g y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Probar que para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $(di)(Y)$ en la dirección $(di)(X)$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.

10. Sea G un grupo que actúa sobre la variedad X de manera propiamente discontinua. Supongamos que en X se tiene una métrica g.
    a) Definir el concepto de "métrica G-invariante".

b) Probar que si g es G-invariante entonces la variedad X/G hereda una métrica de X; i.e, tiene una métrica con la que la proyección $X \to X/G$ es un morfismo de variedades de Riemann.

c) Probar que si G es finito, $\bar{g}$ definida por

$$\bar{g} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} d^* \rho_h(g)$$

es invariante (se nota por ρ_h la acción de $h \in G$ sobre X).

d) ¿Qué sucede en el punto anterior si se tiene una métrica de tipo (r, s)?

11. Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ hereda una métrica de S^n. Hacer lo propio con la banda de Möbius y la botella de Klein.

12. Sea M una variedad difenciable de dimensión n y ∇ una conexión en M. Si $c : I \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in \ I$ y $v_1, \ldots, v_n$ es base de $M_{c(t_0)}$, sean $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ (campos paralelos a lo largo de c) de modo que $X_i(t_0) = v_i$.

a) Ver que $\mathfrak{X}_c^{\|}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

b) $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son linealmente independientes en $M_{c(t)}$ $\forall\ t \in \ I$

c) Si $Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ es tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ entonces $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$. Deducir la dimensión de $\mathfrak{X}_c^{\|}$.

13. Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión ∇

a) Sea $c : I \to M$ una curva. Probar que son equivalentes:

1) $D|_t(< X, Y >) = 0$ si $X, Y \in \ \mathfrak{X}_c^{\|}$

2) $X, Y \in \ \mathfrak{X}_c$, entonces $D|_t(< X, Y >) =< \nabla_D X, Y > + < X, \nabla_D Y >$

b) Ver que son equivalentes:

1) la condición (1-2) de *a*) se cumple para toda curva,

2) ∇ es compatible con la métrica.

c) Deducir que si $X, Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ y ∇ es compatible con la métrica, entonces las normas de X e Y se mantienen constantes y el ángulo entre X e Y también.

14. Sean (M, g) una variedad riemanniana y ∇ compatible con g. Sea $c : I \to M$ una curva y $f : J \to I$ un difeomorfismo.

a) Ver que:

$$\nabla_D (c \dot{\circ} f)|_t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}|_t \dot{c}(f(t)) + (\frac{\partial f}{\partial t})^2 \nabla_D \dot{c}|_{f(t)}$$

b) Si $\dot{c}(0) \neq 0$, y c y $(c \circ f)$ son geodésicas, entonces $f(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

15. Sea M una variedad y ∇ una conexión. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, probar que son equivalentes:

a) $\nabla_X X = 0$ (en este caso decimos que X es paralelo)

b) Toda curva integral $c : I \to M$ de X es una geodésica.

16. Sea G un grupo de Lie de dimensión n. $X_1, \ldots, X_n \in L(G)$ de modo que $X_1(h), \ldots, X_n(h)$ es base de G_h $\forall h \in G$. Definimos:

$$\nabla_Z Y = \sum_{i=1}^n Z(\varphi^i) X_i$$

si $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) ver que esta conexión no depende de los $\{X_i\}_{i=1}^n$ elegidos. Llamamos a esta conexión la conexión canónica de grupos de Lie.

b) $\nabla_X X = 0$ si $X \in L(G)$. Luego toda curva integral de X es una geodésica.

17. Sea G un grupo de Lie con su conexión canónica. Si $c : I \to G$ es una geodésica, entonces existe un campo $X \in L(G)$ tq c es una curva integral de X.

18. Sea $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y ∇ la conexión canónica. Probar que la geodésica c tq $c(0)=I$ y $\dot{c}(0)=A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es de la forma
$$c(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$$

19. Sea (M,∇). Probar que son equivalentes:
   a) El campo geodésico es completo (se dice que la conexión es completa)
   b) $(\exp)_p$ está definida en M_p $\forall p\in\ M$. Es decir si $v\in M_p$ entonces $1\in I_v$, donde éste es el intervalo maximal del flujo del campo geodésico.