Geometría Diferencial

Segundo cuatrimestre 2003

Recuperatorio del parcial 2

(1) Sean $\rho = \rho(x, y, z, t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y $J = J(x, y, z, t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ diferenciables. Se buscan funciones $E = E(x, y, z, t)$ y $B = B(x, y, z, t)$ ambas $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ diferenciables tales que

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div} B = 0,$$

$$\operatorname{rot} E = \frac{-1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

donde c es constante, y "div" y "rot" son los operadores de divergencia y rotor en las coordenadas x, y, z. Expresar estas ecuaciones en términos de formas diferenciables. (Sug: calcular $d\alpha$, con $\alpha = A_1 dy\wedge dz + A_2 dz\wedge dx + A_3 dx\wedge dy + A_4 dx\wedge dt + A_5 dy\wedge dt + A_6 dz\wedge dt$, donde $A_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$.)

Encontrar una condición necesaria (en ρ y J) para que haya solución.

Nota: Las ecuaciones anteriores son conocidas como "ecuaciones de Maxwell".

(2) (a) Sea X una variedad conexa y G un grupo que actúa de manera propiamente discontinua sobre X. Probar que X/G es orientable si y solo si existe una orientación de X que es preservada por todos los difeomorfismos dados por G, si y solo si cualquier orientación de X es preservada por todos los difeomorfismos dados por G.

(b) Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es orientable si y solo si n es impar.

(3) Sea X una variedad y $S : TX \to TTX$ su campo geodésico. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, y definimos $h : TX \to TX$ por $h(x) = \alpha x$. Probar que

$$S \circ h = \alpha(dh) \circ S; \text{ es decir, } S(h(x)) = \alpha h_{*x}(S(x)).$$

(4) Sea $M = \mathbb{R}^3$ y $S(X, Y) = X \times Y$ (producto vectorial de $\mathbb{R}^3$).

(a) Verificar que S es un tensor antisimétrico. Probar que si ∇ es la conexión usual de $\mathbb{R}^3$, entonces $\bar\nabla = \nabla + \frac{1}{2}S$ es una conexión.

(b) Sea c una curva en M y $X \in \mathfrak{X}_c$, $X(t) = \sum_{i=1}^{3} \rho^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i}|_{c(t)}$. Probar que

$$\bar\nabla_D X|_t = \frac{1}{2}(\dot{c(t)} \times X(t)) + \sum \frac{\partial \rho^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^i}|_{c(t)}$$

y que la noción de geodésica en $\mathbb{R}^3$ con esta conexión coincide con la usual.