Variedades Homogéneas

María Angélica Cueto
acueto@delasluces.com.ar

En el presente escrito trataremos de explicar, con la mayor claridad posible, conceptos referentes a variedades diferenciables homogéneas. En primer lugar daremos algunas definiciones básicas para presentar el tema. A continuación de esto daremos 5 ejemplos clásicos de este tipo de variedades, para concluir con dos teoremas, motivados por aquéllos.

El concepto de variedades homogéneas se relaciona estrechamente con el de Grupos de Lie: en efecto, resultan ser el cociente de un Grupo de Lie por un subgrupo cerrado del mismo. El Teorema 4 nos dirá que este grupo cociente admite una estructura canónica de variedad diferenciable, de ahí su nombre de "Teorema Fundamental".

Antes de empezar con los conceptos propios de variedades homogéneas, veamos algunas definiciones básicas que usaremos a lo largo de la exposición. Por convención consideraremos a la variedades diferenciables como espacios localmente euclideanos, Hausdorff y con base numerable (que notaremos $N2$) para la topología subyacente, de acuerdo con lo establecido por el texto de referencia[1].

Un poco de notación:

1. V^d denotará una variedad diferenciable V de dimensión d.
2. r_i denotará la función $r_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_i$.

Existe una propiedad, que usaremos frecuentemente a lo largo de las demostraciones del texto, referente a un tipo de carta compatible, que llamaremos "carta cúbica", que podemos obtener a partir de un atlas dado.

Definición 1 [2] *Una carta (U, φ) de una variedad V^d es una "carta cúbica" si $\varphi(U)$ es un cubo abierto de $\mathbb{R}^d$. Si $m \in U$ y $\varphi(m) = 0$, entonces decimos que la carta está* centrada en m.

[1] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Glenview, AMS, 1970.

[2] En el texto de referencia es la Definición 1.3

Resulta un hecho trivial que si tenemos una carta (U, φ) con $m \in U$, podemos obtener un entorno W de m con $W \subseteq U$ tal que la carta $(W, \varphi_{|W})$ es una "carta cúbica". Además, vía composición con traslaciones en $\mathbb{R}^d$, podemos obtener una carta cúbica centrada en m.

Definición 2 [3] *Sea (U, φ) una carta de V^d con sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, y sea c un entero $1 \leq c \leq d$. Sea $a \in \varphi(U)$, y sea*

$$S = \{q \in U : \quad x_i(q) = r_i(a) := a_i,\ i = c+1, \ldots, d\}$$

El subconjunto S de V junto con las funciones coordenadas

$$x_{j|S} : \quad j = 1, \ldots, c$$

resulta una variedad diferenciable, que es una subvariedad adaptada (paramétrica) de V [4] *llamada un "slice" de la carta (U, φ). Según conveniencia, y para resaltar el punto a, lo notaremos con S_a.*

Con estas dos definiciones, tenemos una propiedad de suma utilidad:

Proposición 1 [5] *Sea $\psi : M^c \to N^d$ una inmersión*[6]*, y sea $m \in M$. Entonces existen una carta cúbica (V, φ) alrededor de $\psi(m)$ y un entorno U de m tales que $\psi_{|U}$ es inyectiva y $\psi(U)$ es un "slice" de $(V, \varphi_{|V})$.*

La base para toda nuestra exposición es el Teorema 1, que enunciaremos a continuación:

Teorema 1 (Teorema de Frobenius) [7] *Sea $\mathcal{D}$ una distribución C^∞, involutiva, de dimensión c en M^d, y sea $m \in M$. Entonces existe una variedad integral de $\mathcal{D}$ en el punto m. Más aún existe una carta cúbica (U, φ) centrada en m, con funciones coordenadas $(x_1, \ldots, x_d)$ tales que los "slices"*

$$x_i = \text{ constante } \quad \forall i \in \{c+1, \ldots, d\}$$

son variedades integrales de $\mathcal{D}$[8]*. Además, si (N, ψ) es una variedad integral conexa de $\mathcal{D}$ tal que $\psi(N) \subseteq U$, entonces $\psi(N)$ cae en uno de estos "slices".*

---

[3] Definición 1.34

[4] una *submanifold* según la definición de Warner, i.e. un par (H, ψ) con H conjunto y $\psi : H \to V$ ψ es inyectiva y $d\psi_{*h}$ es no singular (inyectiva) $\forall hs \in H$.

[5] Proposición 1.35. Consecuencia del Teorema del Rango Constante visto en clase.

[6] i.e. $d\psi_{*m}$ es inyectiva $\forall m \in M$.

[7] Teorema 1.60

[8] cada "slice" junto con la función inclusión.

Definición 3 [9] *Un Grupo de Lie G es un grupo algebraico (cuyo neutro notaremos con e) con una estructura de variedad diferenciable tal que la función $G \times G \to G$ definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ es C^∞.*

Una propiedad importante que poseen estos grupos es la de tener asociada canónicamente un Álgebra de Lie: el correspondiente a los campos de vectores invariantes a izquierda. Si G es un grupo de Lie, notaremos con $\mathfrak{g}$ al álgebra de Lie asociada a G. Según sea conveniente, usaremos el isomorfismo: $\mathfrak{g} \simeq TG_{(e)}$.

Definición 4 [10] *(H, φ) es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G sii:*

1. *H es un grupo de Lie.*
2. *(H, φ) es una subvariedad adaptada de G.*
3. *$\varphi : H \to G$ es un morfismo de grupos.*

(H, φ) es un subgrupo cerrado de G si, además, $\varphi(H)$ es un subconjunto cerrado de G [11].

Teorema 2 [12] *Sea (H^d, φ) un subgrupo de Lie de G^c. Entonces φ es un "imbedding"* [13] *si y sólo si (H, φ) es un subgrupo cerrado de G (esto es, $\varphi(H)$ es cerrado en G).*

Para facilitar la notación, de aquí en más (salvo cuando se indique lo contrario) supondremos que si H es subgrupo cerrado de G entonces $H \subseteq G$ (i.e. suponemos $\varphi = inc$).

Teorema 3 [14] *Sea G un Grupo de Lie y sea A un subgrupo abstracto cerrado de G. Entonces A admite una única estructura diferenciable tal que A resulta un subgrupo de Lie de G. En efecto la topología resultante en A debe ser la topología de subespacio (se debe al Teorema 2).*

Antes de pasar a enunciar el "Teorema fundamental", daremos un lema técnico necesario para su demostración.

---

[9] Definición 3.1

[10] Definición 3.17

[11] es cerrado para la topología dada por la estructura diferenciable de G.

[12] Teorema 3.21

[13] φ es una inmersión y un homeomorfismo entre H y $\varphi(H)$ con la topología de subespacio de G.

[14] Teorema 3.42

Lema[15] *Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G. Entonces, si $\tilde{H}$ es una componente conexa de H, $(\tilde{H}, \varphi_{|_{\tilde{H}}})$ es una variedad integral maximal conexa de la distribución involutiva en G definida por la subálgebra $d\varphi(\mathfrak{h})$.*

Teorema 4 (Teorema fundamental) [16]*Sea H un subgrupo cerrado de G, y G/H el conjunto $\{\sigma H : \sigma \in G\}$ de clases a izquierda módulo H. Sea π la proyección natural. Entonces G/H tiene una única estructura diferenciable que verifica las condiciones:*

1. *π es C^∞.*
2. *Localmente existen secciones C^∞ de G/H en G, i.e. dado $\sigma H \in G/H$ existe un entorno W de σH y una función C^∞ $\tau : G \to G/H$ tal que $\pi \circ \tau = id$.*

Además, se cumple: $\quad dim(G/H) = dim(G) - dim(H)$.

Demostración:
En primer lugar daremos una topología a G/H:

$$U \subseteq G/H \text{ es abierto} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ es abierto de G}$$

Con esta topología (que llamaremos "la topología heredada de π"), π resulta una función abierta, ya que si W es abierto de G, entonces

$$\pi^{-1}\big(\pi(W)\big) = \bigcup_{h \in H} Wh$$

lo que implica que $\pi(W)$ es abierto en G/H (la multiplicación por h es un homeomorfismo en G para todo $h \in H$).
Más aún G/H resulta un espacio Hausdorff: Para ver esto, observemos primero que el conjunto $R \subset G \times G$ dado por

$$R = \{(\sigma, \tau) : \quad \exists h \in H \quad \text{tal que} \quad \sigma = \tau h\}$$

es un conjunto cerrado. En efecto $R = \alpha^{-1}(H)$, donde α es la función continua de $G \times G$ en G que manda $(\sigma, \tau) \mapsto \tau^{-1}\sigma$.
Si σH y τH son distintos puntos en G/H, (σ, τ) no pertenece a R (por def. de R). Como G es Hausdorff y tomamos en $G \times G$ la topología producto, existen entornos abiertos V de σ y W de τ en G, tales que $(V \times W) \cap R = \emptyset$[17].

[15] Corolario 3.19 b
[16] Teorema 3.58
[17] $(\sigma, \tau) \in \big((G \times G) \setminus R\big)$, que es abierto de $G \times G$.

Con esto, $\pi(V)$ y $\pi(W)$ son entornos abiertos de σH y τH disjuntos, lo que prueba que G/H es Hausdorff.

Veamos ahora que esta topología es $N2$. Sabemos que

$$U \text{ es abierto en } G/H \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq G \text{ es abierto} .$$

Además, sabemos que π es suryectiva y abierta (como consecuencia de aquello). Como G es $N2$, entonces podemos tomar una base numerable de abiertos, digamos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego $\{\pi(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base numerable de G/H.

Sabemos que H es subgrupo cerrado de G. Entonces, por Teorema 3, H admite una única estructura de variedad diferenciable que lo hace un subgrupo cerrado de Lie de G. Más aún, la top. resultante en H será la top. de subespacio de G.

Supongamos $dim(G) = d$ y $dim(H) = d - k$, y veamos que G/H es localmente euclideano con la topología dada por π y que su dimensión es igual a k. Para ello primero probaremos que existe una carta cúbica (U, φ) de G centrada en e, con funciones coordenadas $\varphi = (x_1, \ldots, x_d)$ tales que los "slices" de la forma

$$x_i = \text{ constante } \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \tag{1}$$

caen en diferentes clases de H (y viceversa).

Sea $\mathcal{D}$ la distribución de G determinada por el Álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H. Entonces por Teorema 1, existe una carta cúbica (V, φ) en G centrada en e, con funciones coordenadas $(x_1, \ldots, x_d)$ tales que las variedades integrales de $\mathcal{D}$ en V son "slices" de la forma (1). Como H tiene topología de subespacio de G, V puede elegirse suficientemente pequeño para que:

$$V \cap H = \text{ el "slice" } S_0 \text{ a través de e} \tag{2}$$

(i.e.,$V \cap H$ contiene un solo "slice").

DEM: Por Teorema 1, las variedades integrales son "slices" y no hay relaciones de contención entre las mismas. Supongamos que $\tilde{H}$ es la componente conexa de H que contiene a e, como en el Lema previo. Entonces elijo V suficientemente pequeño para que $V \cap H = V \cap \tilde{H}$ (puedo tomar un abierto V que interseque sólo a la componente conexa de e, pues H tiene la topología subespacio de G y es localmente euclideano). Además, pr el lema previo, $\tilde{H}$ es curva integral maximal conexa de $\mathcal{D}$ que pasa por e, con lo cual resulta un "slice" por Teorema 1 (precisamente, el "slice" S_0).

Elijamos ahora entornos U y V_1 de e, cúbicos relativos a la carta (V, φ)[18] tales que

$$V_1\, V_1 \subseteq V \qquad y \qquad U^{-1}\, U \subseteq V_1 \tag{3}$$

Notemos que en tal caso resultan entornos cúbicos centrados en e vía $\varphi_|$.

DEM: Tomamos la función $\beta : G\times G \to G$ definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$. Como β es continua, $\beta(e, e) = e$ y V es abierto con $e \in V$, entonces existen W_1 y W_2 entornos de e tales que $W_1 \times W_2 \subseteq \beta^{-1}(V)$. Tomo $V_1^{'} = W_1 \cap W_2 \cap V$, que resulta abierto en G. Entonces $\varphi(V_1^{'}) \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto con $0 = \varphi(e) \in \varphi(V_1^{'})$. Luego $\exists$ un cubo C centrado en 0 con $C \subseteq \varphi(V_1^{'})$. Elijo $V_1 = V_1^{'} \cap \varphi^{-1}(C)$. En el caso de U, tomamos $\tilde{V} = V_1$, $\tilde{\varphi} = \varphi$ y $\tilde{\beta} : G \times G \to G$ definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma^{-1}\tau$ y trabajamos en forma análoga.

Supongamos ahora que σ y τ son puntos de U partenecientes a la misma clase en G/H, i.e. $\sigma \in \tau H$. En tal caso[19]:

$$\tau^{-1}\sigma \in V_1 \cap H = V_1 \cap S_0 \tag{4}$$

Luego, $\sigma \in \tau(V_1 \cap S_0)$. Ahora, $\tau(V_1 \cap S_0)$ es una variedad integral de $\mathcal{D}$ que cae en V por la elección de V_1 en (3), y es conexa.

DEM: Sabemos que $\tau(V_1 \cap S_0) = l_\tau(V_1 \cap S_0)$. Ahora, $(V_1 \cap S_0, i)$ es una variedad integral de $\mathcal{D}$ pues (S_0, i) es var. int. de $\mathcal{D}$ en V (por Teorema 1) y $V_1 \subseteq V$ es abierto. Sabemos que $V_1 \cap H = V_1 \cap S_0 \subseteq H$ y (H, i) es subvariedad adaptada de G. Como V_1 es abierto de G, tenemos definida:

$$\tilde{l}_\tau = l_{\tau|_{V_1\cap S_0}} : V_1 \cap S_0 \to \tau(V_1 \cap S_0)$$

Con esto, dados $\gamma \in V_1 \cap S_0$, e Y un campo C^∞ de $T\big(\tau(V_1 \cap S_0)\big)$ definido en un entorno W de $\tau\gamma$, obtenemos $\tilde{Y}$ campo C^∞ en $T(V_1 \cap S_0)$ definido en el entorno $\tau^{-1}W$ de γ por

$$\tilde{Y}(\alpha) = (d\tilde{l}_{\tau^{-1}})_{*\tau\alpha}\big(Y(\tau\alpha)\big) \quad \forall \alpha \in V_1 \cap S_0$$

Sabemos por definición de variedad integral, que:

$$di_{*\tau\gamma}\big(Y(\tau\gamma)\big) = di_{*\tau\gamma}\big((d\tilde{l}_\tau)_{*\gamma}(\tilde{Y}(\gamma))\big) = \big(di_{*\tau\gamma} \circ (d\tilde{l}_\tau)_{*\gamma}\big)(\tilde{Y}(\gamma)) =$$

[18] Esto es, $(U, \varphi_{|_U})$ y $(V_1, \varphi_{|_{V_1}})$ son cartas cúbicas.

[19] $V_1 \subseteq V \quad \Rightarrow \quad V_1 \cap H = V_1 \cap (\underbrace{V \cap H}_{S_0})$

$$= d(i \circ \tilde{l}_\tau)_{*\gamma}(\tilde{Y}(\gamma)) = d(l_\tau \circ i)_{*\gamma}(\tilde{Y}(\gamma)) = (dl_\tau)_{*\gamma} \underbrace{\big(di_{*\gamma}(\tilde{Y}(\gamma))\big)}_{\in \mathcal{D}_{(\gamma)}} \in \mathcal{D}_{(\tau\gamma)}$$

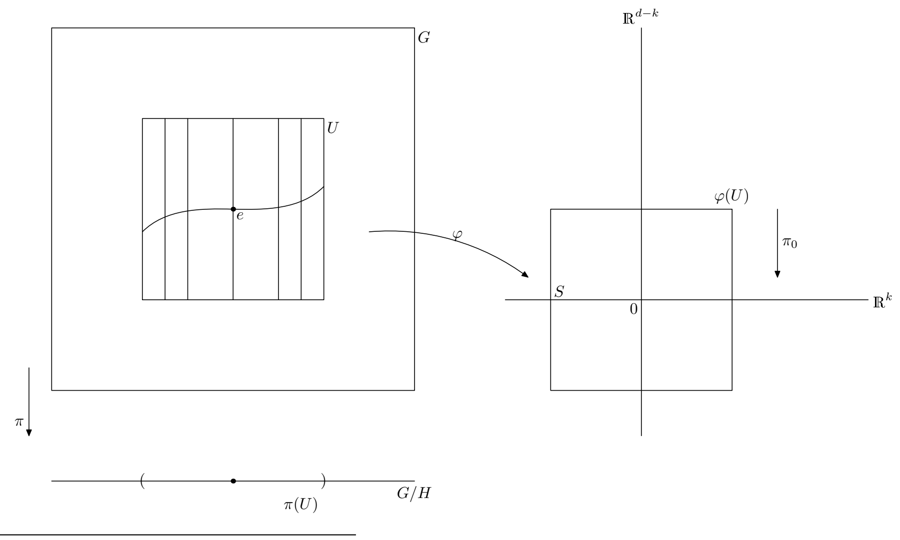
por definición de la distribución $\mathcal{D}$ (generada por campos invariantes). Probada una de las inclusiones, por argumentos de dimensión, se obtiene la igualdad:

$$di_{*\tau\gamma}\big(\tau(V_1 \cap S_0)\big) = \mathcal{D}_{(\tau\gamma)} \quad \forall \gamma \in (V_1 \cap S_0)$$

En consecuencia, $(l_\tau(V_1 \cap S_0), i)$ es variedad integral de $\mathcal{D}$ con $l_\tau(V_1 \cap S_0) \subseteq l_\tau(S_0)$ y es conexa por ser l_τ un difeomorfismo[20].

Luego, por Teorema 1, $\tau(V_1 \cap S_0)$ está incluido en un único "slice" de V. Entonces, σ y τ caen en el mismo "slice"[21]. Recíprocamente, veamos que si S_a es un "slice"en $V_1 \Longrightarrow \exists\, \sigma \in G$ tal que $S_a \subseteq \sigma H$.

DEM: Fijemos $\sigma \in S_a$. Sea $\tau \in S_a$, y quiero ver que $\tau \in \sigma H$, o equivalentemente $\sigma^{-1}\tau \in H$. Ahora bien: $\sigma^{-1}S_a = l_{\sigma^{-1}}(S_a)$. Como vimos antes, $V_1 \cap S_a = S_a$ es una variedad integral conexa de $\mathcal{D}$ por ser un "slice". Entonces $\sigma^{-1}S_a$ es también una variedad integral conexa de $\mathcal{D}$. Por Teorema 1 y por la elección de V_1, $l_{\sigma^{-1}}(S_a) \subseteq S_b$, con S_b "slice" en V para algún b. Como $e \in l_{\sigma^{-1}}(S_a)$ y S_0 es la única v. int. en V que pasa por e, entonces $S_b = S_0$. Luego $l_{\sigma^{-1}}(S_a) \subseteq S_0 \subseteq H$, como queríamos.



[20] $V_1 \cap S_0$ es conexa pues V_1 es entorno cúbico centrado en e y por la forma de S_0.
[21] $e \in V_1 \cap S_0$

Sea $S = \tilde{S}_0 \cap \varphi(U)$ el “slice”de $\varphi(U)$ donde se anulan $x_{k+1}, \ldots, x_d$. Sea $\tilde{S} = \pi_0(\tilde{S}_0)$. Como $S = \tilde{S} \times \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{k veces}}\}$, podemos pensar entonces $S = \tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^k$, ya que tenemos un homeomorfismo natural entre S y $\tilde{S}$.

Sea $\tilde{\varphi}^{-1}$ definida por

$$\tilde{\varphi}^{-1} = \pi \circ \varphi_{|_S}^{-1} : S \to \pi(U)$$

Es fácil ver que $\tilde{\varphi}^{-1}$ es biyectiva por la elección de la carta (U, φ), y además es continua y abierta (π y φ^{-1} son continuas y abiertas), luego es un homeomorfismo. Sea entonces

$$\tilde{\varphi} : \pi(U) \to S \subseteq \mathbb{R}^k \tag{5}$$

la inversa correspondiente.

AFIRMO: $(\pi(U), \tilde{\varphi})$ es una carta en G/H alrededor de eH.

Para obtener cartas alrededor de otros puntos de G/H tomamos traslaciones a izquierda. En efecto, si $\sigma \in G$, sea $\tilde{l}_\sigma$ el homeomorfismo en G/H inducido por l_σ, o sea

$$\tilde{l}_\sigma(\tau H) = (l_\sigma(\tau))H = \sigma\tau H$$

Para cada clase en G/H consideramos separadamente cada uno de los posibles representantes $\sigma H \in G/H$ de la misma. Construiremos varias cartas, una por cada representante, haciendo distinción de cada uno de ellos. Fijado σ que representa la clase $\tilde{\sigma} H = \sigma H$, definimos $\tilde{\varphi}_{\sigma H}$ como

$$\tilde{\varphi}_{\sigma H} \tilde{\varphi}_{\sigma H} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{l}_{\sigma^{-1}} |_{l_{\sigma(\pi(U))}} : l_{\sigma(\pi(U))} \to S \subseteq \mathbb{R}^k$$

Para cada σH tenemos varias cartas definidas a su alrededor. Cada una de las cartas está asociada a un representante diferente de la clase. La distinción de los representantes asegura la buena definición. $\tilde{\varphi}_{\sigma H}$ es homeomorfismo, por ser composición de homeos y $\tilde{l}_{\sigma^{-1}} \circ \tilde{l}_\sigma = id_{|_{G/H}}$. Por ejemplo, notemos que en nuestro caso $\tilde{\varphi}_{eH} = \tilde{\varphi}$.

Para obtener la estructura diferenciable en G/H (que resulta entonces una variedad de dimensión k), simplemente maximizamos la colección de cartas así obtenida [22].

1. $\displaystyle\bigcup_{\sigma \in G} \left(\tilde{l}_\sigma(\pi(U)) \right) = G/H \quad$ pues $eH \in \pi(U)$

2. Veamos la compatibilidad de las cartas

[22] Warner sólo considera estructuras diferenciables maximales.

Sean $(\tilde{l}_{\sigma_1}(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H})$ y $(\tilde{l}_{\sigma_2}(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma_2 H})$ dos cartas y sea

$$Z = \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}\big(\tilde{l}_{\sigma_1}(\pi(U)) \cap \tilde{l}_{\sigma_2}(\pi(U))\big) \subseteq \mathbb{R}^k$$

Tenemos que ver que $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma_1 H}|_Z$ es C^∞. Bastará verlo localmente. Sea $t \in Z$. Como

$$(\tilde{l}_{\sigma_2^{-1}} \circ \underbrace{\tilde{l}_{\sigma_1} \circ \tilde{\varphi}^{-1}}_{\tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma_1 H}})(t) \in \pi(U)$$

y

$$(\tilde{l}_{\sigma_2^{-1}} \circ \tilde{l}_{\sigma_1}) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(t) = \sigma_2^{-1}\sigma_1\tilde{\varphi}^{-1}(t) = (\sigma_2^{-1}\sigma_1)\pi \circ \varphi^{-1}(t,0) = \pi(\sigma_2^{-1}\sigma_1\varphi^{-1}(t,0))$$

$$\Rightarrow \quad \exists g \in H \text{ tal que } (\sigma_2^{-1}\sigma_1\varphi^{-1}(t,0))g \in U$$

AFIRMO: $\exists$ W entorno de t en Z tal que $\sigma_2^{-1}\sigma_1\varphi^{-1}(W)g \subseteq U$

En efecto, tenemos:

$$\phi = r_g \circ l_{\sigma_2^{-1}} \circ l_{\sigma_1} \circ \varphi^{-1} : Z \to G$$

que es continua (homeo). Como $\phi(t) \in U$ abierto de G $\Rightarrow \exists W \subseteq Z$ entorno de t tal que $W \subseteq \phi^{-1}(U)$.

Bastará ver entonces que $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma_1 H}|_W$ es C^∞. Por la elección de W,

$$\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma_1 H}|_W = \pi_0 \circ \varphi \circ r_g \circ l_{\sigma_2^{-1}} \circ l_{\sigma_1} \circ \varphi^{-1}|W$$

donde π_0 es la proyección canónica de $\varphi(U)$ a $S \subseteq \mathbb{R}^k$ [23].
Luego $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma_1 H}|_W$ resulta C^∞ por ser composición de funciones C^∞.

Veamos que con esta estructura diferenciable, $\pi : G \to G/H$ es C^∞. Bastará ver que $\pi_{|_{(l_\sigma(U))}}$ es C^∞, pues dado $\sigma \in G, l_\sigma(U)$ es entorno de σ (recordar que $e \in U$). Ahora bien,

$$\pi|_{(l_\sigma(U))} = \tilde{\varphi}^{-1}_{\sigma H} \circ \pi_0 \circ \varphi \circ l_{\sigma^{-1}}|_{(l_\sigma(U))}$$

Pero la expresión local de $\pi|_{(l_\sigma(U))}$ es

$$\tilde{\varphi}_{\sigma H} \circ \pi_{|_{(l_\sigma(U))}} \circ l_\sigma \circ \varphi^{-1}_{|_{(\varphi(U))}} = \pi_{0|_{(\varphi(U))}}$$

con lo cual resulta C^∞.

[23]tomar las primeras k coordenadas.

Queremos ver que existen seccciones C^∞ de G/H en G. Esto es: si $\sigma H \in G/H$, $\exists$ entorno de σH y una función $\tau : W \to G$ C^∞ tal que $\pi \circ \tau = id$.

Si $\sigma H \in G/H$ elijo:

$$W = \tilde{l}_\sigma(\pi(U)) \quad \text{y} \quad \tau = l_\sigma \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma H}$$

que verifican lo pedido.

UNICIDAD (salvo difeomorfismos):

Sea $(G/H)_1$ otra estructura diferenciable en (G/H) que satisface las condiciones del Teorema.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G/H \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & (G/H)_1 \end{tikzcd}$$

Localmente, si $\sigma H \in G/H$, sea W entorno de σH y $\tau : W \to G$ sección C^∞ de π en G/H. Entonces $\pi \circ \tau_{|W} = \pi_1 \circ \tau_{|W} = id_{|W} : W \subset G/H \to (G/H)_1$ es C^∞. Luego $id : G/H \to (G/H)_1$ es C^∞ (localmente es composición de funciones C^∞). Análogamente, tomando secciones C^∞ en $(G/H)_1$, tenemos que $id : (G/H)_1 \to G/H$ es C^∞.

$\blacksquare$

Observación 1 *La topología de G/H dada por π coincide con la topología de G/H dada por la estructura diferenciable. Luego G/H tiene una estructura dif. que lo convierte en un espacio Hausdorff y N2.*

Definición 5 [24] *Variedades diferenciables de la forma G/H donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G y la estructura dif. es la única que satisface las condiciones del Teorema 4 se denominan variedades homogéneas.*

Observación 2 [25] $f : G/H \to M$ *es* $C^\infty \iff f \circ \pi : G \to M$ *es* C^∞

[24] Definición 3.59
[25] Observación 3.60

Demostración:
$\Rightarrow)$ Trivial.
$\Leftarrow)$ $f \circ \pi : G \to M$ es $C^\infty \Rightarrow$ Sea $\sigma H \in G/H$ y $\tau : W \to G$ sección C^∞ con $\sigma H \in W \Rightarrow f_{|W} = (f \circ \pi) \circ \tau_{|W}$ es C^∞. Como σH es arbitrario, listo.

■

Definición 6 [26] *Sea*

$$\eta : G \times M \to M$$

una acción a izquierda de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M [27] *y sea*

$$\eta_\sigma(m) = \eta(\sigma, m)$$

La acción se dice efectiva *si $\sigma = e$ es el único elemento de G para el cual $\eta_\sigma = id_M$. La acción se llama* transitiva *si dados $m, n \in M$ existe $\sigma \in G$ tal que $\eta_\sigma(m) = n$. Sea $m_0 \in M$, y sea*

$$H = \{\sigma \in G \;:\; \eta_\sigma(m_0) = m_0\}$$

H resulta un subgrupo cerrado[28] *de G, llamado el* grupo isotrópico en m_0 *o el estabilizador de m_0. La acción restringida a H da una acción a izquierda de H en M con punto fijo m_0. Esto da una representación*[29]*:*

$$\alpha : H \to Aut(M_{m_0}) \text{ donde } \alpha(\sigma) = d\eta_{\sigma * m_0 |_{M_{m_0}}}$$

El grupo $\alpha(H)$ de transformaciones lineales de M_{m_0} se llama el grupo isotrópico lineal en m_0.

Teorema 5 [30] *Con la notación de la Definición 6, sea $\eta : G \times M \to M$ una acción a izquierda y transitiva de G sobre M. Sea $m_0 \in M$ y sea H el grupo isotrópico en m_0. Sea:*

$$\tilde{\beta} : G/H \to M \qquad \tilde{\beta}(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0)$$

Entonces, $\tilde{\beta}$ es un difeomorfismo.

[26] Definición 3.61
[27] Se considera, por definición, que una acción entre variedades diferenciables es C^∞.
[28] Esto se prueba tomando redes convergentes de H y usando que η es continua por definición de acción en una var. dif. (es C^∞).
[29] i.e. un morfismo de grupos con imagen incluida en $Aut(M_{m_0}) \simeq GL(n;\mathbb{R})$ donde $n = dim(M_{m_0}) = dim(M)$.
[30] Teorema 3.62

Demostración:
I.- $\tilde{\beta}$ está bien definida, pues si $\sigma H = \tau H \quad \Rightarrow \quad \exists\, g \in H \quad / \quad \sigma = \tau g$
Entonces:

$$\eta_\sigma(m_0) = \eta_{\tau g}(m_0) = \eta_\tau \circ (\underbrace{\eta_\sigma(m_0)}_{=m_0\,(g\in H)}) = \eta_\tau(m_0)$$

- $\tilde{\beta}$ es suryectiva: Sea $m \in M$. Como η es transitiva, entonces:

$$\exists \sigma \in G \text{ tal que } \eta_\sigma(m_0) = m \quad \Rightarrow \quad \tilde{\beta}(\sigma H) = m$$

- $\tilde{\beta}$ es inyectiva: Supongamos $\tilde{\beta}(\sigma H) = \tilde{\beta}(\tau H)$ Entonces, por def. de $\tilde{\beta}$ y aplicando $\eta_{\tau^{-1}}$, resulta:

$$\eta_{\tau^{-1}\sigma}(m_0) = \eta_e(m_0) = m_0$$

  Luego, por def. de H, $\tau^{-1}\sigma \in H \qquad \Rightarrow \qquad \sigma H = \tau H$

II.- Sabemos por Observación 1 que G/H es Hausdorff y N2. Para probar que $\tilde{\beta}$ es difeomorfismo, bastará ver que $\tilde{\beta}$ es C^∞ y $d\tilde{\beta}$ es no singular en todo punto[31].

- Por Observación 2:

$$\tilde{\beta} \text{ es } C^\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\beta} \circ \pi : G \to M \text{ es } C^\infty$$

  Pero $\tilde{\beta}\circ\pi(\sigma) = \eta_\sigma(m_0) = \eta\circ i_{m_0}(\sigma)$ donde $i_{m_0} : G \to G \times M \quad \sigma \mapsto (\sigma, m_0)$ es C^∞.

- Tenemos definido

  $d\tilde{\beta}_{*\sigma H} : (G/H)_{\sigma H} \to M_{\tilde{\beta}(\sigma H)}$ y $\beta = \tilde{\beta}\circ\pi$, donde π es la proy. al cociente

  Como $d\pi_{*\sigma} : (G)_\sigma \to (G/H)_{\sigma H}$ tiene como núcleo a $(\sigma H)_\sigma \subseteq G_\sigma$ [32], $d\pi$ es epimorfismo[33] y $d\beta = d\tilde{\beta} \circ d\pi$, para ver que $d\tilde{\beta}$ es monomorfismo, basta ver que $Ker(d\beta_{*\sigma}) = (\sigma H)_\sigma$. Ahora bien, para cada $\sigma \in G$ tenemos:

$$\beta = \eta_\sigma \circ \beta \circ l_{\sigma^{-1}}$$

[31] Esto se debe a la siguiente propiedad: "Si $\psi : M \to N$ es C^∞, biyectiva y no singular en todo punto, entonces ψ es un difeomorfismo" (figura como Ejercicio 6, Capítulo 1 del libro de referencia.

[32] se prueba viendo $Ker(d\pi_{*\sigma}) \supset (\sigma H)_\sigma$ y usando teorema de dimensión para transformaciones lineales.

[33] localmente existen secciones C^∞ de π.

lo que implica:

$$d\beta_{*\sigma} = (d\eta_\sigma \circ d\beta \circ dl_{\sigma^{-1}})_{*\sigma} : G_\sigma \to M_{\beta(\sigma)}$$

Como $(d\eta_\sigma)_{*\beta(e)=m_0}$ y $(dl_{\sigma^{-1}})_{*\sigma}$ son isomorfismos, entonces basta ver que $Ker(d\beta_{|G_e})$ es H_e.

Trivialmente vale $Ker(d\beta_{|G_e}) \supset H_e$, así que veamos la otra inclusión.

Sabemos que todo campo invariante a izquierda de un grupo de Lie es completo[34]. Dado X campo invariante a izquierda en G, sea exp_X el subgrupo uniparamétrico[35] :

$$exp_X : \mathbb{R} \to G \text{ definido por } dexp_{X*t}\left(\lambda \frac{d}{dr}|_t\right) = \lambda X(exp_X(t))$$

O sea, $t \mapsto exp_X(t)$ es el único subgrupo uniparamétrico tal que el vector tangente en 0 es $X(e)$ [36].

Definamos $exp : \mathfrak{g} \to G$ la función exponencial, como: $exp(X) = exp_X(1)$.

Sea $x \in Ker(d\beta_{|G_e})$. Para ver que $x \in H_e$, sólo tenemos que probar que $exp(tX) = exp_X(t) \in H \ \forall t \in \mathbb{R}$, donde X es el campo en H invariante a izquierda determinado por $X_{(e)} = x$. Para esto, basta probar que $\gamma : I \to M$ dado por $t \mapsto \beta(exp(tX))$ tiene como vector tangente al vector nulo en todo punto, pues entonces $\gamma(t) = \beta(exp(tX)) = cte = m_0 = \gamma(0)$. En efecto, resultará entonces, por definición de H, que $exp(tX) \in H \quad \forall t$.
Ahora bien, el vector tangente a γ en t es:

$$d\beta(X_{exp(tX)}) = d\eta_{exp(tX)} \circ d\beta \circ \underbrace{(dl_{\underbrace{exp(-tX)}_{(exp(tX))^{-1}}}(X_{(exp(tX))}))}_{X_{(e)}=x} =$$

$$= d\eta_{exp(tX)} \circ \underbrace{d\beta(x)}_{0} = 0$$

[34]Para todo lo referente a este tema y a la construcción de la función exponencial ver pág. 101 a 104 del libro de referencia.

[35]i.e. un morfismo de grupos de Lie $\psi : \mathbb{R} \to G$

[36]Sabemos que tal morfismo existe por ser $\mathbb{R}$ un grupo de Lie simplemente conexo (munido de la operación suma) y por el siguiente Teorema:
"Dados G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ y H simplemente conexo, sea $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ un homomorfismo de álgebras de Lie (i.e. lineal y que preserva corchete). Entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : H \to G$ tal que $d\varphi = \psi$". (Teorema 3.27)

ya que X es invariante a izquierda.

Por lo tanto, $d\tilde{\beta}$ es no singular en todo punto. $\blacksquare$

Observación 3 *Sea $H \subseteq G$ subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Tenemos entonces una acción natural a izquierda de G sobre G/H*

$$\tilde{l} : G \times G/H \to G/H \quad \tilde{l}(\sigma, \tau H) = \sigma\tau H \tag{6}$$

- *Es facil ver que $\tilde{l}$ es acción "algebraica"*[37] *de grupos.*
- *$\tilde{l}$ es C^∞: Sea $(\sigma, \tau H)$ y por Teorema 4 sean $W \subset G/H$ entorno de τH y $\psi : W \to G$ sección C^∞. Entonces:*

  $$\tilde{l}(\sigma, \tilde{\tau}H) = \tilde{l}(\sigma, \pi(\tilde{\tau})) = \pi \circ l(\sigma, \tilde{\tau}) = \pi \circ l \circ (id, \psi)(\sigma, \tilde{\tau}H) \quad \forall \tilde{\tau} \in \pi^{-1}(W)$$

  donde l es la multiplicación en G. Por lo tanto, $\tilde{l}$ es C^∞.
- *$\tilde{l}$ es transitiva, pues la multiplicación en G lo es.*

Ahora, para todo $\sigma \in G$, $\tilde{l}_\sigma$ es difeomorfismo en G/H, y dados $\sigma H, \gamma H$ $\tilde{l}_{\gamma\sigma^{-1}} : G/H \to G/H$ es difeomorfismo que manda σH en γH. Las variedades del tipo de G/H se llaman homogéneas *porque tienen este grupo transitivo de difeomorfismos ($\{\tilde{l}_\sigma : \sigma \in G\}$). Recíprocamente, el Teorema 5 muestra que si M tiene un grupo transitivo de difeomorfismos dado por una acción η ($\{\tilde{\eta}_\sigma : \sigma \in G\}$), entonces $\exists H$ subgrupo cerrado de G tal que $M \simeq G/H$ (difeomorfos). En efecto, H se construye como en el Teorema 5. Por el mismo Teorema, tenemos otra caracterización para la estructura diferenciable de G/H: este conjunto tiene una única estructura tal que la función de (6) es C^∞.*

Teorema 6 *Sea G grupo de Lie y $H \lhd G$ cerrado. Entonces, G/H con su estructura de grupo natural es un grupo de Lie.*

Demostración:
Basta ver que, con la estructura de variedad diferenciable de G/H dada por el Teorema 4, G/H es un grupo de Lie. O sea, hay que verificar que

$$\tilde{l} : G/H \times G/H \to G/H \quad \tilde{l}(\sigma H, \tau H) = \sigma\tau^{-1}H$$

es C^∞. Notemos que $\tilde{l}$ está bien definido pues H es subgrupo normal.

[37] i.e. sin pedir C^∞.

Sean $\alpha_\sigma : W_\sigma \to G \quad \alpha_\tau : W_\tau \to G$ secciones C^∞ de G/H. Localmente, en $W_\sigma \times W_\tau$ resulta:

$$\tilde{l}_{|W_\sigma \times W_\tau} = \pi \circ \varphi \circ (\alpha_\sigma, \alpha_\tau) \quad \text{donde} \quad \varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$$

Luego $\tilde{l}$ es C^∞ por ser composición de funciones C^∞. ■

Ejemplos

Antes de describir algunos ejemplos importantes de variedades homogéneas, daremos un lema técnico que necesitaremos para el desarrollo de los mismos.

Teorema 7 [38] *Supongamos que $\psi : N \to M$ es C^∞, que (P, φ) es subvariedad adaptada de M, y que ψ se factoriza a través de (P, φ), esto es $\psi(N) \subseteq \varphi(P)$. Como φ es inyectiva, existe una única función ψ_0 de N en P tal que $\varphi \circ \psi_0 = \psi$.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

1. *ψ_0 es C^∞ si es continua.*

2. *ψ_0 es continua si φ es un imbedding*[39].

(a) Sea $E = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $\sigma \in Gl(n, \mathbb{R})$ que determina la transformación lineal $m_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que notaremos también con σ por comodidad. Tenemos definida entonces una acción a izquierda de $Gl(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$

$$\eta : Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \eta(\sigma, v) = \sigma(v)$$

[38] Teorema 1.32

[39] i.e. φ es una inmersión y un homeomorfismo entre P y $\varphi(P)$.

- η es acción algebraica y es transitiva.
- η es C^∞: Sea $\pi_1 : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ la proyección a la primer columna, o interpretando $\sigma \in M(n,\mathbb{R})$ como una transformación lineal, $\pi_1(\sigma) = \sigma(e_1)$. Por definición de la estructura dif. de $M(n,\mathbb{R})$, π_1 es C^∞. Además, la multiplicación de matrices (que notaremos con l) es C^∞. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, resulta: $\eta(\sigma, v) = \pi_1(\sigma\tilde{v})$ donde $\tilde{v} \in \pi^{-1}(v)$ es la matriz en $M(n,\mathbb{R})$ que tiene a v como primer columna y cero a las demás. Notemos $\alpha : \mathbb{R}^n \to M(n,\mathbb{R})$ la función $\alpha(v) = \tilde{v}$. Claramente, α es C^∞. Entonces:

$$\eta(\sigma, v) = \big(\pi_1 \circ l \circ (id, \alpha)\big)(\sigma, v)$$

con lo cual η es C^∞.

Sea $<,>$ producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$, para el cual E es base ortonormal. Entonces, si $\sigma \in Gl(n,\mathbb{R})$, resulta: $<\sigma(v), w> = <v, \sigma^t(w)>$.

Sea $O(n) = \{\sigma \in M(n,\mathbb{R}) : \sigma^t\sigma = I\}$. Sabemos que es un subgrupo cerrado de $Gl(n,\mathbb{R})$. Si $\sigma \in O(n)$:

$$<\sigma(v), \sigma(w)> = <v, \sigma^t\sigma(w)> = <v, w> \quad \forall v, w$$

Por lo tanto, si $\sigma \in O(n)$, σ preserva el producto interno canónico. En particular, preserva normas. Entonces, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
O(n) \times S^{n-1} \arrow[r, "\eta_|"] \arrow[dr, dashed, "\eta_0"'] & \mathbb{R}^n \\
& S^{n-1} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $\eta_|$ es C^∞ (pues es la restricción de η al producto cartesiano entre un subrupo cerrado $\big(\mathrm{O(n)}\big)$ y una subvariedad adaptada (S^{n-1})), entonces η se factoriza a través de (S^{n-1}, i). Por Teorema 7, η_0 es C^∞,ya que (S^{n-1}, i) es un imbedding. Tenemos entonces una acción natural a izquierda C^∞:

$$\eta_0 : O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

del grupo ortogonal O(n) en la esfera unitaria S^{n-1}.

AFIRMO: η_0 es acción transitiva.

En efecto, sea $v = v_1 \in S^{n-1}$. Extiendo a una base ortonormal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sea entonces $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j} \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} e_j$$

Entonces σ verifica $\sigma(e_1) = v_1$ y $\sigma \in O(n)$.

En general: si v y w son dos puntos cualesquiera de S^{n-1} sean $\sigma_1, \sigma_2 \in O(n)$ tales que $\sigma_1(e_1) = v$ y $\sigma_2(e_1) = w$. Entonces ${\sigma_1}^{-1} \in O(n)$ y ${\sigma_1}^{-1}(v) = e_1$ $\Longrightarrow \sigma = \sigma_2 {\sigma_1}^{-1} \in O(n)$ y $\sigma(v) = w$.

Sea

$$H = \left\{ \sigma \in O(n) : \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} , \hat{\sigma} \in M(n-1, \mathbb{R}) \right\}$$

Es claro que $\hat{\sigma} \in O(n-1)$.

- H es subgrupo de O(n)
- H es cerrado:
  Sea $\{\sigma_i\}_{i \in I} \subset H$ red convergente a $\sigma \in G$. Entonces:

$$\lim_{i \in I} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma}_i & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} = \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \mathrm{a} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$$

  $\Rightarrow a = 0, b = 0,\ c = 1$ y $\lim_{i \in I} \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}$. Como $\hat{\sigma}_i \in O(n-1)$ subgrupo cerrado de $Gl(n-1, \mathbb{R})$, entonces $\hat{\sigma} \in O(n-1)$, con lo cual $\sigma \in H$.

AFIRMO: H es el subgrupo isotrópico de O(n) en $e_n \in S^{n-1}$, respecto de la acción η_0.
DEM: $(\subseteq)$ $\quad \eta_0(\sigma, e_n) = \sigma(e_n) = e_n$ si $\sigma \in H$
$(\supseteq)$ $\quad$ Sup. $\sigma(e_n) = e_n$, $\sigma \in O(n)$, digamos

$$\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \mathrm{a} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$$

Ahora, $\sigma(e_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{in} e_i = e_n \Rightarrow a = 0$ y $c = 1$.
Como $\sigma \in O(n) \Rightarrow \sigma\sigma^t = I$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \hat{\sigma} & \\ & \end{pmatrix} & 0 \\ \text{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \hat{\sigma}^t & \\ & \end{pmatrix} & \text{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow 1 = I_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ni}^2 + \underbrace{\sigma_{ni}^2}_{=1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ni}^2 + 1 \Rightarrow \sigma_{ni} = 0 \ \forall i < n$$

$$\Longrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \in H \quad \text{pues } \sigma \in O(n)$$

Ahora bien, podemos identificar canónicamente a H con $O(n-1)$. De esta forma, por el Teorema 5 tenemos:

$$\beta : O(n)/O(n-1) \to S^{n-1} \qquad \beta\big(\sigma O(n-1)\big) = (\eta_0)_\sigma(e_n) = \sigma(e_n)$$

difeomorfismo. Luego,

$$S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1)$$

Similarmente $S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1)$ vía

$$\eta_{|_{SO(n)\times S^{n-1}}} \text{ y } H = \left\{\sigma \in SO(n) : \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma} \in M(n-1, \mathbb{R})\right\}$$

que podemos identificar con SO(n-1)[40] ($\sigma \mapsto \hat{\sigma}$). Hay que usar que $SO(n) \subset Gl(n, \mathbb{R})$ es subgrupo cerrado y el Teorema 5, en forma similar a lo hecho recién.

[40] $SO(n) = \{\sigma \in O(n) : det(\sigma) = 1\}$

(b) Como en el ejemplo **(a)**, consideremos E base canónica de $\mathbb{C}^n$ e identificamos $\sigma \in Gl(n, \mathbb{C})$ con los isomorfismos lineales de $\mathbb{C}^n$ Tenemos definida entonces una acción a izquierda de $Gl(n, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^n$

$$\eta : Gl(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \eta(\sigma, v) = \sigma(v)$$

donde $Gl(n, \mathbb{C})$ es grupo de Lie sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2n^2$ y $\mathbb{C}^n$ es $\mathbb{R}$-variedad diferenciable de dimensión $2n$. Al igual que en el ejemplo **(a)**, η resulta una acción C^∞.

Sea $<\,,\,>$ producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$, donde E es base ortonormal. Entonces, si $\sigma \in Gl(n, \mathbb{C})$, resulta: $< \sigma(v), w > = < v, \bar{\sigma}^t(w) >$. Sea $U(n) = \{\sigma \in Gl(n, \mathbb{C}) : \sigma\bar{\sigma}^t = I\}$ y sea $\sigma \in U(n)$. Como en (a), σ preservará normas (p.i.). Notemos con X a la esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$, que resulta una subvariedad adaptada de esta última y con (X, i) un imbedding. Como en **(a)**, por ser $U(n) \subset Gl(n, \mathbb{C})$ subgrupo cerrado, tenemos una nueva acción a izquierda, que será C^∞ por el Teorema 7:

$$\eta_0 = \eta_{|_{U(n)\times X}} : U(n) \times X \to X$$

Como en **(a)**, esta acción es transitiva y tomando:

$$H = \left\{\sigma \in U(n) : \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma} \in M(n-1, \mathbb{C})\right\}$$

o equivalentemente:

$$H = \left\{\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma} \in U(n-1)\right\}$$

H resulta el subrupo isotrópico de U(n) en $e_n \in X$ para la acción η_0. Además podemos identificar canónicamente: $H \simeq U(n-1)$. Por lo tanto por el Teorema 5: $X \simeq U(n)/U(n-1)$.

Ahora bien, por medio del atlas natural en $\mathbb{C}^n$ dado por la base dual a la base real $B = \{e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, X es difeomorfo a $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Entonces, por transitividad, $S^{2n-1} \simeq U(n)/U(n-1)$.

Por un argumento similar (tomando $\eta_{|_{SU(n)\times X}}$), la esfera S^{2n-1} también es difeomorfa a la variedad homogénea $SU(n)/SU(n-1)$[41].
En particular, para $n = 2$, $SU(n-1) = (1)$; luego $S^3 \simeq SU(2)$. En consecuencia, S^3 hereda una estructura natural de grupo de Lie a partir de este difeomorfismo. Más aún, es posible probar que S^1 y S^3 son las únicas esferas que poseen estructura de grupo de Lie[42].

(c) Consideremos el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^{n-1} \simeq (\mathbb{R}^n - \{0\})/\sim$, donde $a \sim b \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : \lambda a = b$. Damos a $\mathbb{P}^{n-1}$ la máxima topología para la cual la proyección natural

$$\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

es continua. En tal caso $\pi_{|_{S^{n-1}}}$ es un 2-revestimiento de $\mathbb{P}^{n-1}$. Es fácil ver que existe una única estructura diferenciable tal que esta función es localmente un difeomorfismo[43].
Por un argumento similar al usado en el ejemplo **(a)**, se puede ver que $\mathbb{P}^{n-1} \simeq SO(n)/O(n-1)$ si consideramos $O(n-1)$ como subgrupo cerrado de $SO(n)$ vía la identificación de O(n-1) con

$$H = \left\{\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & \det(\hat{\sigma}) \end{pmatrix}, \hat{\sigma} \in O(n-1)\right\}$$

En efecto H es subgrupo isotrópico de $SO(n)$ en e_n para la acción

$$\eta : SO(n) \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1} \quad \eta(\sigma, \bar{x}) = \overline{\sigma(x)}$$

donde $^{-}$ denota la clase en $\mathbb{P}^{n-1}$.

- η está bien definido pues $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ para algún λ no nulo. Entonces $x \sim y \Rightarrow \sigma(x) \sim \sigma(y)$.

[41] $SU(n) = \{\sigma \in U(n) : det(\sigma) = 1\}$

[42] H. Samelson, *"Uber die Sphären die als Gruppenräume auftreten"*. Comment Math. Helv., **13**, pág 144-155, 1940.

[43] Hay que usar en S^{n-1} el atlas dado por las proyecciones estereográficas y que tenemos una acción propia y discontinua de $\mathbb{Z}_2$ sobre S^{n-1} de forma tal que $\mathbb{P}^{n-1}$ es difeomorfo al cociente de S^{n-1} por esta acción.

- Si pensamos $\tilde{\eta} : SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ que es acción C^∞ por lo visto en **(a)**, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
SO(n) \times S^{n-1} \arrow[r, "\tilde{\eta}"] \arrow[d, "(id,\pi)"'] & S^{n-1} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^{n-1} \\
SO(n) \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[urr, "\eta"'] & &
\end{tikzcd}$$

  (id, π) es localmente un difeomorfismo (pues π lo es).Como $\tilde{\eta}, \pi$ son localmente C^∞, entonces η es localmente C^∞, y por tanto C^∞.

- $H = (H_\eta)_{e_n}$:
  $(\supseteq)$ Se prueba como ya lo hemos hecho antes.
  $(\subseteq)$ $\sigma \in H \Rightarrow \sigma(e_n) = \det(\hat{\sigma})e_n \sim e_n$

Entonces, por Teorema 5: $\mathbb{P}^{n-1} \simeq SO(n)/O(n-1)$.

En los próximos ejemplos buscaremos, a partir de una acción algebraica a izquierda y transitiva, una estructura diferenciable para un cociente de grupos (que hará el rol de G/H) de modo de obtener un difeomorfismo $\tilde{\beta}$ como el del Teorema 5.

(d) En este caso consideraremos el plano proyectivo complejo, definido similarmente al real:

$$\mathbb{CP}^{n-1} \simeq (\mathbb{C}^n - \{0\})/\sim, \text{ donde } a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : \lambda a = b$$

Nos proponemos darle a $\mathbb{CP}^{n-1}$ una estructura de variedad diferenciable real (que será de dimensión $2(n-1)$).
La acción sobre la esfera unitaria $X \subset \mathbb{C}^n$, definida en el ejemplo **(b)** y restringida al grupo $SU(n)$, preserva esta relación de equivalencia, donde interpretamos $\mathbb{CP}^{n-1} \simeq X/\sim$. Por lo tanto, tenemos una acción algebraica natural:

$$\tilde{\eta} : SU(n) \times \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1} \quad (\sigma, \bar{x}) \mapsto \overline{\sigma(x)} = \pi(\sigma(x))$$

donde $\bar{z}$ denota clase de z en $\mathbb{CP}^{n-1}$.

En este caso, construimos el conjunto:

$$H = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1/\det(\hat{\sigma}) \end{pmatrix} , \hat{\sigma} \in U(n-1) \right\}$$

H resulta el subgrupo isotrópico de $SU(n)$ en e_n para la acción $\tilde{\eta}$. Podemos identificar $H \simeq U(n-1)$, lo que permite pensar a $U(n-1)$ como un subgrupo cerrado de $SU(n)$ (H es cerrado por su construcción: $U(n-1)$ es subgrupo cerrado de $Gl(n-1,\mathbb{R})$ y det es una función continua nunca nula en $Gl(n-1,\mathbb{R})$). Tenemos entonces una biyección como en el Teorema 5:

$$\beta : SU(n)/U(n-1) \to \mathbb{CP}^{n-1} \quad \beta(\sigma U(n-1)) = \pi(\sigma(e_n)) = \tilde{\eta}(\sigma, e_n)$$

Damos entonces una estructura diferenciable a $\mathbb{CP}^{n-1}$ a partir de β y de la estructura dif. de $SU(n)/U(n-1)$ (dada por el Teorema 4). En efecto, tomamos el atlas $\mathcal{A}$ de $SU(n)/U(n-1)$ y lo componemos con β, para obtener el correspondiente atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{CP}^{n-1}$:

$$\mathcal{A} = \left\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\right\} \Rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \left\{(\beta(U_i), \varphi_i \circ \beta^{-1}) : i \in I\right\}$$

Calculemos entonces la dimensión de esta estructura diferenciable en $\mathbb{CP}^{n-1}$, usando el Teorema 4:

$$\begin{aligned} dim\left(\mathbb{CP}^{n-1}\right) &= dim\left(SU(n)/U(n-1)\right) = dim\left(SU(n)\right) - dim\left(U(n-1)\right) = \\ &= (n^2-1) - (n-1)^2 = 2(n-1) \end{aligned}$$

(e) **STIEFEL MANIFOLD of p-FRAMES in V**

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión d y sea

$S_p(V) = \{$p-frames en V$\} = \{\bar{w} = (w_1, \ldots, w_p) : w_1, \ldots, w_p$ son l.i. en V$\}$

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_d\}$ base de V. En tal caso, $Gl(d, \mathbb{R})$ actúa algebraicamente a izquierda sobre V por multiplicación matricial.

$$\eta : Gl(d, \mathbb{R}) \times S_p(V) \to S_p(V) \quad \big(\sigma, (w_1, \ldots, w_d)\big) \mapsto \big(\sigma(w_1), \ldots, \sigma(w_d)\big)$$

AFIRMO: η es acción transitiva.
En efecto, dados $\bar{v}, \bar{w} \in S_p(V) : \exists \sigma \in Gl(d, \mathbb{R})$ tal que $\eta(\sigma, \bar{v}) = \bar{w}$[44].

Sea $\tilde{s} = (v_1, \ldots, v_p) \in S_p(V)$ formado por los primeros p elementos de la base B. Consideremos $H = H_{\tilde{s}}$ subconjunto de $Gl(d, \mathbb{R})$ que deja fijo a $\tilde{s}$ vía η. En efecto, por elección de $\tilde{s}$:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in Gl(d, \mathbb{R}) \right\}$$

y es subgrupo cerrado de $Gl(d, \mathbb{R})$.

Tenemos entonces

$$\tilde{\beta} : Gl(d, \mathbb{R})/H \to S_p(V) \qquad \tilde{\beta}(\sigma H) = \eta_\sigma(\tilde{s})$$

es biyección. Ahora daremos a $S_p(V)$ una estructura natural de variedad diferenciable, de modo que $\tilde{\beta}$ resulte un difeomorfismo, al igual que en el ejemplo **(d)**. En efecto, $S_p(V)$ resultará una variedad de dimensión pd.

AFIRMO: Esta estructura no depende de la elección de B.
Consideremos B, B' dos bases de V, y sean $\eta_B, \eta_{B'}$ como antes. Por construcción, resulta

$$H_B = H'_B = H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in Gl(d, \mathbb{R}) \right\}$$

Luego, vía $\tilde{\beta}_B$ y $\tilde{\beta}_{B'}$ tenemos,

$$\begin{array}{rcl} Gl(d, \mathbb{R})/H_B & = & Gl(d, \mathbb{R})/H_{B'} \\ Gl(d, \mathbb{R})/H_B & \simeq & (S_p(V))_B \\ Gl(d, \mathbb{R})/H_{B'} & \simeq & (S_p(V))_{B'} \end{array}$$

donde $(S_p(V))_B$ y $(S_p(V))_{B'}$ denotan las estructuras dif. de $S_p(V)$ construidas a partir de B y B', respectivamente. Por lo tanto de acuerdo con

[44] tomo $\tilde{\sigma}$ tal que $\tilde{\sigma}(v_i) = w_i$ y extiendo a un automorfismo de V.

las ecuaciones anteriores, ambas estructuras son difeomorfas. En consecuencia, ambas tiene un mismo atlas maximal, lo que indica que la estructura es la misma en ambos casos. Por lo tanto, podemos hablar, a partir de ahora, de la estructura diferenciable de $S_p(V)$ sin depender de la base B elegida. $S_p(V)$ se llama el *"Stiefel Manifold of p-frames in V"*.

Veamos que la dimensión de esta variedad es en efecto dp. Como en el Teorema 4, $Gl(d, \mathbb{R})/H$ es variedad de dimensión $\dim(Gl(d, \mathbb{R})) - \dim(H) = d^2 - \dim(H)$. Ahora bien,

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in Gl(d, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \big(B\big) \in M(d-p, \mathbb{R}) \text{ tiene rango (d-p)}$$

$$\Longleftrightarrow \big(B\big) \in Gl(d-p, \mathbb{R})$$

Luego:

$$\dim(H) = \dim\big(\mathbb{R}^{p\times(d-p)}\big) + \dim\big(Gl(d-p, \mathbb{R})\big) = p(d-p) + (d-p)^2 = d(d-p)$$

$$\Longrightarrow \quad \dim\big(S_p(V)\big) = d^2 - d(d-p) = dp, \text{ como queríamos.}$$

(f) **Variedades Grassmannianas de k-planos (subespacios) de V**

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión d como en el ejemplo **(e)** y sea

$$M_k(V) = \{S \subseteq V : S \text{ es subespacio de dimensión k}\}$$

Como antes, fijemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_d\}$ de V y sea η la acción algebraica a izquierda natural de $Gl(d, \mathbb{R})$ sobre V restringida a $O(n)$:

$$\eta : O(d) \times V \to V \quad (\sigma, v) \mapsto (\sigma(v))$$

Como isomorfismos lineales mandan subespacios de dimensión k en subespacios de dimensión k, tenemos naturalmente definida:

$$\tilde{\eta} : O(d) \times M_k(V) \to M_k(V)$$

Identificamos V con $\mathbb{R}^d$ (vía toma de coordenadas en la base B), con lo cual V hereda un producto interno natural: $< v, w >_V = < [v]_B, [w]_B >_{\mathbb{R}^d}$
De esta forma, claramente $\tilde{\eta}$ es una acción transitiva.

Ahora, sea P_0 el k-subespacio[45] $P_0 =< v_1, \dots, v_k >$, generado por los primeros k elementos de la base B. Sea H el subespacio de $O(d)$ que deja fijo a P_0 vía $\tilde{\eta}$. Entonces:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \sigma & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array} \right) \in O(d) : \sigma \in O(k), \tau \in O(d-k)) \right\}$$

($\supseteq$) es claro

($\subseteq$) Sea $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in H$. Como $\tilde{\eta}(P_0) = P_0 \Rightarrow C = 0$ y $A \in O(k)$. Como $M \in O(d) \Rightarrow B = 0 \Rightarrow D \in O(d-k)$, y vale entonces la inclusión.

Por lo tanto, podemos identificar $H \simeq O(k) \times O(d-k)$. Como $\tilde{\eta}$ es transitiva, tenemos la biyección:

$$\tilde{\beta} : O(d)/O(k) \times O(d-k) \to M_k(V) \qquad \sigma(O(k) \times O(d-k)) \mapsto \tilde{\eta}_\sigma(P_0)$$

Dando a $M_k(V)$ la estructura natural de variedad diferenciable (vía $\tilde{\beta}$), resulta como en los ejemplos **(d)** y **(e)** que $\tilde{\beta}$ es difeomorfismo. Al igual que antes, podemos ver que esta construcción no depende de la base B elegida, ya que las estructuras dadas a $M_k(V)$ a tavés de las distintas bases, resultarán difeomorfas y por lo tanto definirán el mismo atlas maximal. $M_k(V)$ recibe el nombre de *"Grassmann manifold of k-planes in V"*

Para calcular la dimensión de esta variedad, usemos nuevamente el Teorema 4. Sabemos que $\dim\big(O(k)\big) = \frac{1}{2}k(k-1)$[46]. Entonces,

$$\dim\big(M_k(V)\big) = \dim\big(O(d)\big) - \dim\big(O(k) \times O(d-k))\big) =$$

$$= \dim\big(O(d)\big) - \big\{\dim\big(O(k)\big) + \dim\big(O(d-k)\big)\big\} = (d-k)k$$

como queríamos.

Finalmente, y para terminar con la exposición, usaremos estos ejemplos para probar dos Teoremas referentes a la conexión de algunos de los grupos mencionados.

[45] designaremos como k-subespacio de V a un subespacio de dimensión k (o k-plano).
[46] visto en clase.

Proposición 2 [47] *Sea $H \subseteq G$ subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Si H y G/H son conexos, entonces G es conexo.*

Demostración:
Supongamos
$$G = U \cup V \tag{7}$$
donde U y V son abiertos de G no vacíos. Queremos ver que $U \cap V \neq \emptyset$.

Aplicando la proyección al cociente π, tenemos

$$H = \pi(U) \cup \pi(V)$$

donde $\pi(U)$ y $\pi(v)$ son abiertos no vacíos de G/H (recordemos que π es abierta). Como G/H es conexo, existe un punto $\sigma H \in G/H$ tal que

$$\sigma H \in (\pi(U) \cap \pi(V)) \tag{8}$$

Ahora (7) implica que:

$$\sigma H = (\sigma H \cap U) \cup (\sigma H \cap V)$$

donde $(\sigma H \cap U)$ y $(\sigma H \cap V)$ son abiertos de σH (porque H tiene topología de subespacio y la función l_σ es un homeo en G). De acuerdo con (8), tanto $(\sigma H \cap U)$ como $(\sigma H \cap V)$ son no vacíos. Ahora, como σH es homeomorfo a H y por lo tanto conexo, tenemos:

$$(\sigma H \cap U) \cap (\sigma H \cap V) \neq \emptyset$$

lo que implica que $U \cap V \neq \emptyset$ como queríamos probar. ■

Teorema 8 [48] *Los grupos de Lie $SO(n)$, $SU(n)$, y $U(n)$ son conexos para $n \geq 1$, mientras que O(n) tiene dos componentes conexas ($n \geq 1$).*

Demostración:
I.-Lo haremos por inducción en n, usando que S^n es conexo para cualquier $n \geq 1$:

- $n = 1$: $SO(n) = (1)$, $SU(n) = (1)$, son conexos.
  $U(n) = \{(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\} \Rightarrow$ es conexo.
- $n > 1$:

[47] Proposición 3.66
[48] Teorema 3.67

- Por ejemplo **(a)**, $SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$. Por ser $n > 1$, por H.I. sobre $SO(n-1)$, y usando Proposición 2, $SO(n)$ es conexo.
- Por ejemplo **(b)**, $SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$. Por ser $2n-1 \geq 1$, por H.I. sobre SU(n-1), y usando Proposición 2, $SU(n)$ es conexo.
- Por ejemplo **(b)**, $U(n)/U(n-1) \simeq X \simeq S^{2n-1}$, donde X es la esfera unitaria en $\mathbb{C}$. Por ser $2n-1 \geq 1$, por H.I. sobre U(n-1), y usando Proposición 2, SU(n) es conexo.

II.-En el caso de O(n): Sabemos que dado $\sigma \in O(n)$ resulta $\det(\sigma) = \pm 1$. Luego podemos descomponer O(n) como unión de dos conjuntos:

$$O(n) = \underbrace{SO(n)}_{det=1} \cup \underbrace{\sigma SO(n)}_{det=-1} \quad \text{donde } \sigma = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

SO(n) es conexo y $\sigma SO(n) \simeq SO(n)$. Luego ambos conjuntos son conexos. Además son abiertos disjuntos de O(n), pues:

$$SO(n) = (det > 0) \cap O(n)$$
$$\sigma SO(n) = (det < 0) \cap O(n)$$

y tanto $(det > 0)$ como $(det < 0)$ son abiertos de $Gl(n, \mathbb{R})$ (pues $det : Gl(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua). Por lo tanto estas son las dos componentes conexas de O(n).

■

Teorema 9 [49] *$Gl(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas.*

Para la demostración de este Teorema, necesitamos un lema auxiliar, que exponemos a continuación:

Lema *En $Gl(n, \mathbb{R})$ tenemos una "descomposición polar", i.e.*

$$\forall \sigma \in Gl(n, \mathbb{R}) \quad \exists P, R \text{ tal que } \sigma = PR$$

[49] Teorema 3.68

donde $R \in O(n)$ y P es una matriz simétrica y definida positiva.

Demostración:
Sabemos que $\alpha = \sigma\sigma^t$ es simétrica y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Por lo tanto es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y los espacios de autovectores correspondientes son ortogonales.

Sea a un autovalor de α y $v \in \mathbb{R}$ un autovector asociado. Sabemos por lo visto en el desarrollo del ejemplo **(a)** que

$$a \underbrace{< v, v >}_{>0} = < \sigma\sigma^t(v), v > = \underbrace{< \sigma^t(v), \sigma^t(v) >}_{>0}$$

que ocurre pues $\sigma \in Gl(n, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $a > 0$ y por lo tanto, $\alpha = \sigma\sigma^t$ es definida positiva.

Como además es simétrica, entonces $\exists \beta \in O(n)$ tal que

$$\beta(\sigma\sigma^t)\beta^t = D$$

donde D es diagonal con todos los autovalores positivos. Sea entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Como $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, podemos considerar entonces $D^{1/2} \in Gl(n, \mathbb{R})$

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^{1/2} \end{pmatrix}$$

Sean

$$P = \beta^t (\underbrace{\beta\sigma\sigma^t\beta^t}_{=D})^{1/2}\beta \qquad \text{y} \qquad R = P^{-1}\sigma \tag{9}$$

- P es simétrica y definida positiva (pues $P \simeq D^{1/2}$, que es def. positiva)
  De la expresión (9) tenemos:

  $$P^2 = (\beta^t(\beta\sigma\sigma^t\beta^t)^{1/2}\beta).(\beta^t(\beta\sigma\sigma^t\beta^t)^{1/2}\beta) = \beta^t(\beta\sigma\sigma^t\beta^t)\beta = \sigma\sigma^t$$

  donde las igualdades ocurren pues $\beta^{-1} = \beta^t$.
  $\Rightarrow RR^t = P^{-1}\sigma\sigma^t \underbrace{(P^{-1})^t}_{={P^t}^{-1}} = P^{-1}\sigma\sigma^t (\underbrace{P^t}_{=P})^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I$

- $\sigma = PR$ por construcción.

$\blacksquare$

Demostración (Teorema 9):
Consideremos:

$$Gl(n,\mathbb{R})^+ = (det > 0) \qquad y \qquad Gl(n,\mathbb{R})^- = (det < 0)$$

que son abiertos disjuntos de $Gl(n,\mathbb{R})$. Además $Gl(n,\mathbb{R})^- = \sigma Gl(n,\mathbb{R})^+$ donde σ es como en la demostración del Teorema 8. Luego, $Gl(n,\mathbb{R})^+ \simeq Gl(n,\mathbb{R})^-$. Bastará entonces con ver que $Gl(n,\mathbb{R})^+$ es conexo para ver que ambas son las dos componentes conexas de $Gl(n,\mathbb{R})$.

Para ver esto, probaremos que dado $\sigma \in Gl(n,\mathbb{R})^+$ existe $\gamma : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R})^+$ continua, con $\gamma(0) = \sigma \quad y \quad \gamma(1) = I$. Luego $Gl(n,\mathbb{R})^+$ será arcoconexo y, por ende, conexo. Ahora, usemos el lema auxiliar recién demostrado. Si $\sigma \in Gl(n,\mathbb{R})^+$, descomponemos a σ como en el lema. Como $det(P) > 0$ y $det(\sigma) > 0 \Rightarrow det(R) > 0$, Pero $det(R) = \pm 1$ ($R \in O(n)$). Entonces $R \in SO(n)$.

Sea $P_t = tI + (1-t)P : \quad t \in [0,1]$.

- $P_0 = P$ y $P_1 = I$.
- P_t es simétrica pues P y I lo son.
- P_t es definida positiva: En efecto,

$$P_t \simeq tI + (1-t)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(1-\lambda_1)+\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t(1-\lambda_n)+\lambda_n \end{pmatrix}$$

Sea entonces $f_{\lambda_i} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_{\lambda_i}(t) = t(1-\lambda_i)+\lambda_i$. Claramente f_{λ_i} es continua. Además $f_{\lambda_i}(0) = \lambda_i > 0$ y $f_{\lambda_i}(1) = 1 > 0$. Si vemos que es nunca nula, entonces, P_t resultará definida positiva. Si $\lambda_i = 1$, no hay nada que hacer. Supongamos entonces que no.

$$t(1-\lambda_i)+\lambda_i = 0 \Leftrightarrow t(1-\lambda_i) = -\lambda_i \Leftrightarrow t = \frac{-\lambda_i}{1-\lambda_i}$$

Como $t \in [0,1]$, esto pasa sii

$$0 \leq \frac{-\lambda_i}{1-\lambda_i} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda_i \leq 0 \\ \lambda_i \leq -(1-\lambda_i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i \geq 1 \\ 0 \leq -1 \end{cases}$$

lo que es un absurdo.

Entonces, tenemos $\gamma : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R})^+$ definida por $t \mapsto P_t R$. Por lo tanto, γ está bien definida[50], es continua, $\gamma(0) = PR = \sigma$ y $\gamma(1) = IR = R$.
Como SO(n) es arcoconexo (es conexo por el Lema y es localmente arcoconexo por ser localmente euclideano) entonces $R \in SO(n)$ puede unirse a I mediante una curva continua en $SO(n) \subset Gl(n,\mathbb{R})^+$. Luego, componiendo ambos caminos tenemos un camino continuo en $Gl(n,\mathbb{R})^+$ que une σ con I. De esta forma, vemos que $Gl(n,\mathbb{R})^+$ es arcoconexo, como queríamos. ■

[50] Como $\det(P_t) > 0$ y det(R)=1, resulta $\gamma(t) \in Gl(n,\mathbb{R})^+$ $\forall t$.