Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Fibrados vectoriales

1. Definición y construcción

Definición 1.1. *Sea M una variedad y V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un fibrado (vectorial) sobre M con fibra V es el siguiente conjunto de datos:*

- *Una variedad E y una función diferenciable y suryectiva $\pi : E \to M$;*
- *para cada $x \in M$, la "fibra" $V_x := \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial isomorfo a V;*
- *para cada $x \in M$, existe un abierto U que contiene a x y un isomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \cong U \times V$ tal que si $\pi(e) = y \in U$, entonces $\phi(e) = (y, *)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times V \arrow[dl, "p_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

- *está dado un sistema $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ de abiertos y difeomorfismos como antes, tales que*
  - *$\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de M*
  - *para cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$, la composición*

$$\begin{tikzcd}
(U_i \cap U_j) \times V \arrow[r, "\phi_i^{-1}"] \arrow[dr] & \pi^{-1}(Ui \cap U_j) \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d] & (U_i \cap U_j) \times V \arrow[dl] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

es lineal en la fibra. Es decir, para cada $x \in U_i \cap U_j$, la la aplicación

$$\phi_{Uj} \circ \phi_{Ui}^{-1} : V_x \to V_x$$

es un isomorfismo lineal.

La variedad E se llama **espacio total***, la variedad M se llama* **base***, la aplicación π se llama* **proyección***, un abierto U como antes se llama* **abierto trivializante***, y las composiciones $\phi_{Uj} \circ \phi_{Ui}^{-1}$ se llaman* **funciones de transición**.

Ejemplo 1.2. Si M es una variedad y V es un espacio vectorial, entonces $E = M \times V$ y $\pi : M \times V \to M$ dada por $\pi(x, v) = x$ es un fibrado, que llamaremos **fibrado trivial**. Aquí un abierto trivializante es el mismo M (y todo abierto contenido en M también).

Ejemplo 1.3. Si M es una variedad de dimensión n, consideramos el conjunto $TM := \coprod_{x \in M} T_x$ y la aplicación $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(v) = x$, si $v \in T_x$.

Se define la siguiente estructura diferenciable: Si (U, ϕ) es una carta de M, tomamos $\widetilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{\phi}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right) = (\phi(x), v_1, \ldots, v_n)$$

Ejercicio 1.4. Probar que TM es una variedad diferenciable de dimensión el doble que la de M.

Ejercicio 1.5. Probar que tomando (TM, π), con base M, y abiertos trivializantes las cartas de M, resulta TM un fibrado vectorial sobre M.

Proposición 1.6. *Sea V un espacio vectorial, M una variedad, U y W dos abiertos de M tales que $U \cup W = M$. Sea $\phi : U \cap W \to \mathrm{GL}(V)$ una función diferenciable. Entonces existe un único fibrado E tal que $U_1 = U$ y $U_2 = W$ son dos abiertos trivializantes, y la función de transición $\phi_{U2} \circ \phi_{U1}^{-1} : V_x \to V_x$ está dada por*

$$(x, v) \mapsto (x, \phi_x(v))$$

Recordar que $\phi : U \cap W \to \mathrm{GL}(V)$, aquí ϕ_x es una notación para $\phi(x) \in \mathrm{GL}(V)$.

Demostración. Tomamos $E := (U \times V \times \{1\} \coprod W \times V \times \{2\})/\sim$ donde relacionamos $(u, v, 1) \sim (u, \phi_u(v), 2)$ para todo $u \in U \cap W$. En el producto cartesiano ponemos la topología producto, en la unión disjunta la topología de unión disjunta, y en el cociente la topología cociente.

Ejercicio 1.7. Notar que $U \times V$ y $W \times V$ son claramente variedades diferenciables. Probar E admite una única estructura diferenciable tal que $U \times V \times \{1\}$ y $W \times V \times \{2\}$ son subvariedades (de hecho son abiertos).

Observar que la función $\pi : E \to M$ dada por $\overline{(x, v, *)} \mapsto x$ ($* = 1, 2$) está bien definida. Definimos $\phi_1 : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ por

$$\phi_1\left(\overline{(u, v, 1)}\right) = (u, v),$$

y $\phi_2 : \pi^{-1}(W) \to W \times V$ por

$$\phi_2\left(\overline{(w, v, 2)}\right) = (w, v).$$

Notando que, para $x \in U \cap V$, $\overline{(x, v, 1)} = \overline{(x, \phi_x(v), 2)}$, vemos que la fórmula de la función de transición es la que queríamos. $\square$

Ejemplo 1.8. (La banda de Moebius.) Sea $B = S^1$, que la pensamos como $U := S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ unión $W := S^1 \setminus \{(0, -1)\}$. Consideramos los fibrados $U \times \mathbb{R}$ y $W \times \mathbb{R}$, y los pegamos según la fórmula:

$$\phi : V \cap W \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Convencerse que es un fibrado.

Ejercicio 1.9. Generalice la construcción de la proposición anterior para el pegado de tres abiertos. Notar que hay que agregar una condición de coherencia para la interseccion de a tres: (llamamos U_{123} a $U_1 \cap U_2 \cap U_3$)

$$\begin{tikzcd}
& \pi^{-1}(U_{123}) \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr, "\phi_3"] & \\
U_{123} \times V(\subseteq U_1 \times V) \arrow[r, "\phi_2\phi_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\phi_3\phi_1^{-1} = (\phi_3\phi_2^{-1})(\phi_2\phi_1^{-1})"'] & U_{123} \times V(\subseteq U_2 \times V) \arrow[r, "\phi_3\phi_2^{-1}"] & U_{123} \times V(\subseteq U_3 \times V)
\end{tikzcd}$$

por lo tanto, a las funciones de transición habrá que pedirles la condición $\phi_{23}\phi_{12} = \phi_{13}$ en la intersección de a tres. (además de $\pi_{12} = \phi_{21}^{-1}$, $\phi_{23} = \phi_{32}^{-1}$, y $\phi_{13} = \phi_{31}^{-1}$).

Ejemplo 1.10. Recordar que el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mathbin{/} (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ consiste en el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se define el siguiente subconjunto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathrm{U} := \{((x_0 : \cdots : x_n), v) \mathbin{/} (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ y } v \in \langle (x_0 : \cdots : x_n) \rangle\}$$

donde $\langle (x_0 : \cdots : x_n) \rangle$ significa la recta generada por $(x_0, \ldots, x_n)$. Probar que U es una variedad diferenciable, de dimensión $n + 1$, y que la proyección $\pi : \mathrm{U} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$((x_0 : \cdots : x_n), v) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$$

hace de U un fibrado (de linea) sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Este fibrado se llama Fibrado Universal, o Fibrado Taultológico.

Ejercicio 1.11. Para $n = 1$, encuentre explícitamente los abiertos trivializantes. Defina el fibrado tautológico para las Grasmanianas.

2. Morfismos de fibrados

Definición 2.1. *Si $\pi : E \to B$ y $p : E' \to B$ son dos fibrados, un morfismo de fibrados es una aplicacion diferenciable $F : E \to E'$ tal que*

- *$\pi = \pi F$, es decir, que el siguiente diagrama sea conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

- *para cada $b \in B$, la aplicación $F|_{V_b} : V_b \to V_b$ es una transformación lineal.*

Ejercicio 2.2. La clase de fibrados, con estos morfismos forman una categoría.

Definición 2.3. *Un fibrado se llamará* **trivial** *si es isomorfo a un fibrado de la forma $M \times V$.*

Definición 2.4. *Un fibrado con fibra de dimensión uno se llamará* **fibrado de linea**.

Ejercicio 2.5. Sea $\pi : L \to M$ un fibrado de linea, supondremos M conexo. Si $m \in M$. llamemos 0_m al cero del espacio vectorial V_m. Consideremos el conjunto $L_0 := \{(m, 0_m) : \ / \ m \in M\}$. Demostrar que si L es un fibrado de linea trivial, entonces $L \setminus L_0$ tiene dos componentes conexas.

Ejemplo 2.6. Demuestre que el fibrado de linea "banda de Moebius"no es trivial. Observe que puede comprobar este hecho empíricamente, recortando por el medio una banda de Moebius, y viendo que queda conexo.

Ejercicio 2.7. Probar que el fibrado tangente a S^1 es trivial. En general, probar que el fibrado tangente a cualquier grupo de Lie es trivial.

3. Operaciones con fibrados

Sean $\pi : E \to B$ y $\pi' : E' \to B$ dos fibrados. Si $b \in B$, llamemos V_b a $\pi^{-1}(b)$ y V_b' a $\pi'^{-1}(b)$. Construya los siguientes fibrados:

1. (Suma directa.) En cada fibra se pone $V_b \times V_b'$, el fibrado resultante se llama $E \oplus E'$.
2. (Hom.) En cada fibra se pone $\mathrm{Hom}(V_b, V_b')$.
3. Como caso particular del anterior, dado $\pi : E \to B$ un fibrado, se puede considerar el fibrado de linea trivial $E : w' = B \times \mathbb{R}$, y construir entonces el fibrado dual. Llamemos E^* a este fibrado.
4. $\mathrm{Bil}(E \times E')$: en cada fibra poner a $\mathrm{Bil}(V_b \times V_b', \mathbb{R})$ (las funciones bilineales).
5. (Producto tensorial.) En cada fibra se pone $V_b \otimes V_b'$, el fibrado resultante se llama $E \otimes E'$. Notar que $E \otimes E' \cong \mathrm{Hom}(E'^*, E)$, y que $\mathrm{Bil}(E \times E', \mathbb{R}) \cong E^* \otimes E'^*$.

Ejercicio 3.1. Sea $\pi : L \to B$ un bibrado de linea. Demuestre que $\mathrm{End}(L) = \mathrm{Hom}(L, L) = L^* \otimes L$ es un fibrado de linea trivial. Sugerencia: considere la seccion "constantemente identidad"

4. Secciones

Definición 4.1. *Sea $\pi : E \to B$ un fibrado, una sección es una función diferenciable $s : B \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$. Es decir, para cada punto $b \in B$ se elige un vector $v \in V_b$ (y esta elección varía diferenciablemente con respecto a b). El conjunto de secciones de un fibrado $\pi : E \to B$ se denotará $\Gamma(B, E)$.*

Ejemplo 4.2. $\Gamma(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$.

Ejercicio 4.3. Si $\pi : E \to B$ es un fibrado, demuestre que con las operaciones punto a punto $\Gamma(B, E)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, más aún, es un $\mathcal{C}^\infty(B)$-módulo.

Ejercicio 4.4. Sea $E = B \times V$ el fibrado trivial con fibra V, entonces $\Gamma(B, E) \cong \mathcal{C}^\infty(M, V) \cong \mathcal{C}^\infty(M)^n$ donde $n = \dim(V)$. Es decir, $\Gamma(B, E)$ es un $\mathcal{C}^\infty(B)$-módulo libre de rango $\dim(V)$.

5. Más ejercicios sobre el tangente

Ejercicio 5.1. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre dos variedades diferenciables. Recordar que, dado $p \in M$, se define $df_p : T_pM \to T_f(p)N$ por

$$df_p(v) = v \circ f$$

donde $v \in T_p$ se lo interpreta como una derivación del germen de funciones alrededor de p en $\mathbb{R}$. Pruebe que la función $f_* : TM \to TN$ definida por

$$f_*(v) = df_p(v) \text{ si } v \in T_pM$$

es diferenciable, y hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Notar que f_* es lineal en la fibra.

Ejercicio 5.2. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad, y consideremos $i_* : TM \to T\mathbb{R}^n$. Identificando el tangente a un ponto de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$, convencerse que de esta manera, el espacio tangente a un punto p de M se lo puede pensar inmerso en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 5.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad definida por $f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de una cierta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable (por ejemplo, una esfera). Sea $\nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ el campo vectorial "gradiente de f", definido sobre $\mathbb{R}^n$. Considerando, para $p \in M$, $i_*(T_pM) = di_p(T_pM) \subset T_p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$, demuestre que "el tangente a p en M es ortogonal a $\nabla f|_p$", es decir,

$$i_*(T_pM) = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \;/\; \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right\}$$

Ejercicio 5.4. Sea $M = S^3$, $X_i; i = 1, 2, 3$ los siguientes campos vectoriales en la esfera conseguidos por restricción de los siguientes campos vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} X_1 &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \\ X_2 &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} \\ X_3 &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

- Verificar que son campos vectoriales en la esfera (es decir, que en cada punto de la esfera da un vector tangente, y que las funciones $X_i : S^3 \to TS^3$ son diferenciables).
- Con el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, verificar que en todo punto de la esfera dan una base ortonormal del tangente; probar en consecuencia que TS^3 es trivial. Usted ya lo sabía? Recuerde el ejercicio 10 de la práctica 1.
- Calcular $[X_i, X_j]$ para todo $i, j = 1, 2, 3$, y expresarlo en términos de los X_i's.