GEOMETRÍA DIFERENCIAL
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2004
SOBRE EL TEOREMA DE FROBENIUS: EXISTENCIA DE CURVAS INTEGRALES.

1. El ejercicio..

Teorema 1.1. *Sea $\theta : W \subset I \times M \to M$ una acción local, y X el campo vectorial "generador infinitesimal". Si $p \in M$ es tal que $X(p) \neq 0$, entonces existe un sistema de coordenadas (V, ψ) alrededor de p, $v > 0$, un entorno V' de p tal que $\theta(I_v \times V' \subset V$ tales que en ese sistema de coordenadas, θ está dada por*

$$\theta(t, y_1, \ldots, y_n) = (t + y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

En este sistema de coordenadas, $X(p) = \psi_*^{-1}(\partial/\partial y_1) = \partial/\partial \psi_1$

Demostración. Considerando un sistema de coordenadas (U, ϕ) alrededor de p, θ se expresa como

$$\phi(\theta(t, \phi^{-1}(x))) = h(t, x)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$. Tenemos $h(0, x) = x$, y

$$h(t, h(t'(x))) = h(t + t', x)$$

Asumimos que ϕ esta elegido de manera tal que $\phi(p) = 0$ y $X(p) = \partial/\partial\phi_1|_p$. Notar que en términos de h, esta condición se escribe como $\partial h_i/\partial y_1|_0 = \delta_{i0}$.

Tomamos C un cubo centrado en 0 (de $\mathbb{R}^n$) de diámetro δ, con δ suficientemente pequeño como para que $\phi^{-1}(C) =: V \subset U$ verifique $\theta(I_\delta \times V) \subset U$.

Consideramos la función $F : C \subset I_\delta \times \mathbb{R}^{n-1}$ dada por

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (h_1(y_1; 0, y_2, \ldots, y_n), h_2(y_1; 0, y_2, \ldots, y_n), \ldots h_n(y_1; 0, y_2, \ldots, y_n),)$$

Recordamos que $\partial h^i/\partial y_1|_0 = \delta_{1,0}$, y del hecho que $y_i = h_i(0; 0, y_2, \ldots, y_n)$, para $i > 1$, vemos que $\partial h_i/\partial y_j|_0 = \delta_{ij}$, si $j > 1$. De esto se sigue que el Jacobiano de F en 4l 0 es la matriz identidad, por lo tanto es un difeo local. Tomamos $\psi = F^{-1} \circ \phi$. Entonce

1. $\psi(p) = F^{-1}(\phi(p)) = F^{-1}(0, \ldots, 0)$, y para $y_1, \ldots, y_n)$ en un entorno del cero, tenemos

2. $h_i(t + y_1; 0, y_2, \ldots, y_n) = h_i(t, h(y_1; 0, y_2, \ldots, y_n))$.

Esta formula se puede inetrpretar como sigue: en el sistema de coordenadas dado por Ψ, si $(y_1, \ldots, y_n) = \psi(q)$, entonces $\psi(\theta_t(q)) = (t + y_1, \ldots, y_n)$. En otras palabras, en esas coordenadas, el morfismo θ_t se expresa con funciones $\widetilde{h}_i(t, y)$ definidas en en conjunto $I_v \times C_v(0)$, dadas por

$$h_1(t; y_1, \ldots, y_n) = t + y_1,$$

$$h_i(t; y_1, \ldots, y_n) = y_i \quad i > 1$$

De estas formulas, se sigue que

$$X(q) = \psi_*^{-1}\partial/\partial y_1 = \partial/\partial\psi_1$$

□

2. El teorema de existencia de curvas integrales

Teorema 2.1. *Sean $f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x)$ n funciones de clase C^k definidas en un abierto $I_\epsilon \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces existe un abierto V y $\delta > 0$ tal que para todo $a \in V$ existen únicas funciones $x_i(t)$, $t \in (-\delta, \delta)$ tales que, para $i = 1, \ldots, n$:*

$$x_i'(t) = f(t, x(t))$$

$$x_i(0) = a_i$$

Demostración. Primer observamos que, si las $x_i(t)$ son continuas, y verifican

$$x_i(t) = a_i + \int_0^t f_i(t, x(t))dt$$

entonces son clase C^1. Mas aun, si f es de clase C^k y las $x_i(t)$'s verifican la ecuacion integral de recien, entonces son por lo menos de clase C^{r+1} (dado que sus derivadas son de clase C^r).

La ecuacion integral se puede escribir como una upla, si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$:

$$x(t) = a + \int_0^t f(t, x(t))dt$$

Para un dado $x_0 \in U$, tomamos $0 < r < 1$ tal que $\overline{B}_{3r}(x_0) \subset U$ y ϵ' tal que $0 < \epsilon' < \epsilon$ (y por lo tanto, $\overline{I_{\epsilon'}} \subset I_\epsilon$. Las funciones $f_i(t,x)$ son de clase C^k, $k \geq 1$, en el compacto $\overline{I_{\epsilon'}} \times \overline{B}_{3r}(x_0)$, por lo tanto, tanto las f_i's como sus derivadas son acotadas en este conjunto. Se sigue que podemos encontrar $M > 1$ tal que $\sup ||f(t,x)|| \leq M$, y $||f(t,x) - f(t,y)|| \leq M||x - y||$. (La última desigualdad se sigue del teorema del valor medio y la continuidad de las derivadas.) Tomemos δ tal que $\delta < r/M^2$.

Probaremos el teorema para este δ y para el abierto $V = B_r(x_0)$.

Sea $a \in \overline{B_r(x_0)}$, y llamemos $\mathcal{F}$ al conjunto de funciones continuas $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ definidas en $\overline{I}_\delta$ a valores en $\overline{B}_{2r}(a)$ que satisfacen $\phi(0) = a$.

Consideremos L definido por

$$L(\phi)(t) = a + \int_0^t f(t, \phi(t))dt$$

Utilizaremos el siguiente lema:

Lema 2.2. *Sea X un espacio métrico completo y $L : X \to X$ una función que verifica $d(L(x), L(y)) \leq kd(x,y)$ para cierto k con $0 < k < 1$. Entonces existe un único $x \in X$ tal que $L(x) = x$.*

La demostración de este lema queda como ejercicio, simplemente observamos que si $x \in X$ es arbitrario, entonces se puede probar que la sucesión $x, L(x), L^2(x), L^3(x), \ldots, L^n(x), \ldots$ es una sucesión de Cauchy.

Con este lema probado, vemos que tenemos que demostrar lo siguiente:

1. $\mathcal{F}$ es un espacio métrico completo con la distancia dada por $d(\phi, \psi) = \sup_{t \in I_\delta} ||\phi(t) - \psi(t)||$. Esto es claro, porque con esta distancia, la convergencia es la convergencia uniforme, y límite uniforme de continuas es continua.

2. Si $\phi \in \mathcal{F}$, entonces $L(\phi) \in L$. Para esto, es claro que ϕ es continua, de hecho es de clase C^1, y tambien es claro que $L(\phi)(0) = a$. Tenemos que ver que cuando $|t| < \delta$, vale la desigualdad $||L(\phi)(t) - a|| \leq 2r$. Esto se sigue de las desigualdades

$$||L(\phi)(t) - a|| = \left|\left|\int_0^t f(\tau, \phi(\tau)d\tau\right|\right| \leq \int_0^t ||f(\tau, \phi(\tau)||d\tau \leq M\delta < r/M < r.$$

3. $d(L(\phi), L(\psi)) \leq kd(\phi, \psi)$ para cierto $k < 1$:

$$\begin{array}{rcl} ||L(\phi) - L(\psi)|| & \leq & \int_0^t ||f(\tau, \phi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))|| d\tau \\ & \leq & \delta M \sup_{t \in I_\delta} ||\phi(t) - \psi(t)|| \\ & = & \delta M d(\phi, \psi) \\ & < & \frac{r}{M} d(\phi, \psi) \end{array}$$

□

Ejercicio 2.3. Demostrar el Lema 2.2.